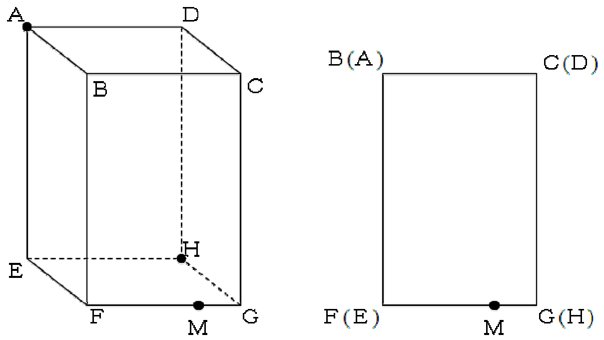
演習問題集応用編・６年上

第１７回のくわしい解説

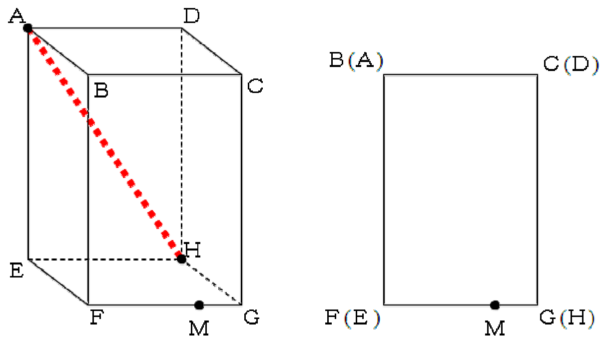
すぐる学習会

第１７回Ａ　$\boxed{1}$(1)

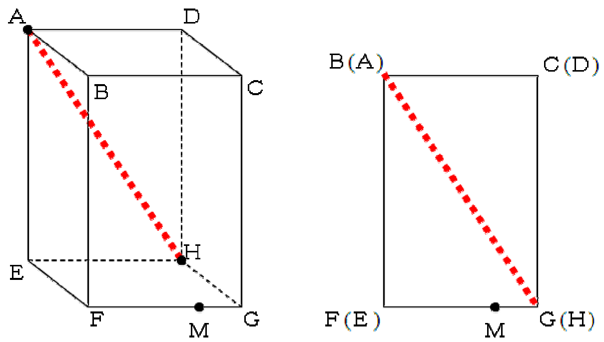
右図のように，ま正面から見た図も書いておくと，わかりやすい。



ＡとＨを通る線は，後ろの面(面ＡＥＨＤ)にあるので，引いてよい。

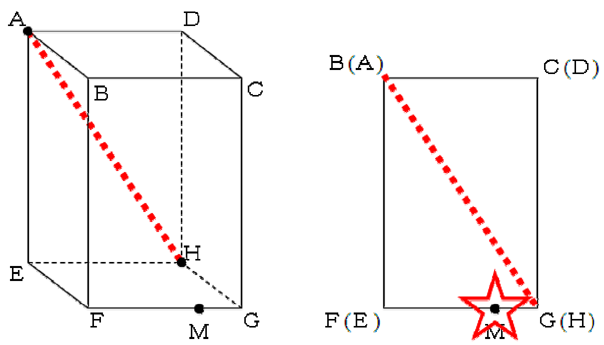


ま正面の図にも，ＡとＨを通る線を書いておく。

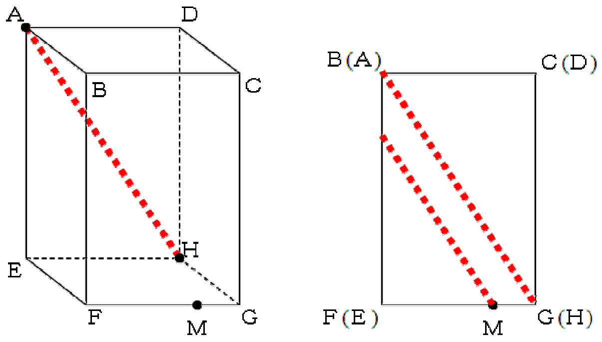


前の面と後ろの面とは平行なので，切り口の線も平行になる。

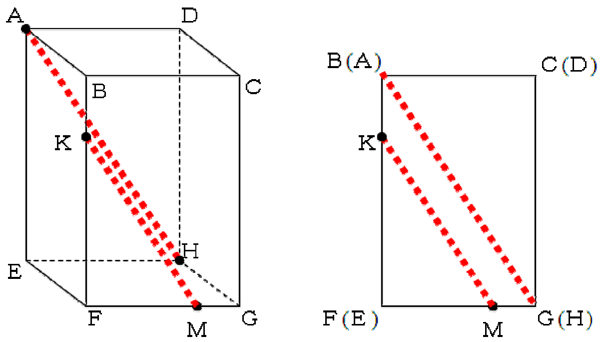
前の面では，Ｍから線を書くことになるので，



ま正面の図に，平行線を書くことができる。



右図のように，ＡＨと平行になるような位置に，点Ｋがある。



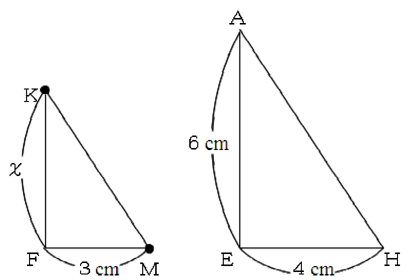
三角形ＫＦＭと三角形ＡＥＨとは相似で，

ＫＦの長さをχとすると，

$\chi : 3 = 6 : 4$

$\chi = 3 \times 6 \div 4 = 4.5$ (cm)

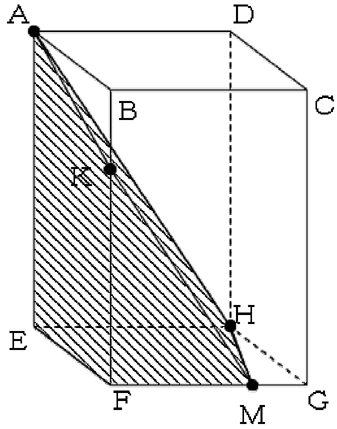
よって，ＫＦの長さは４.５ cm になる。



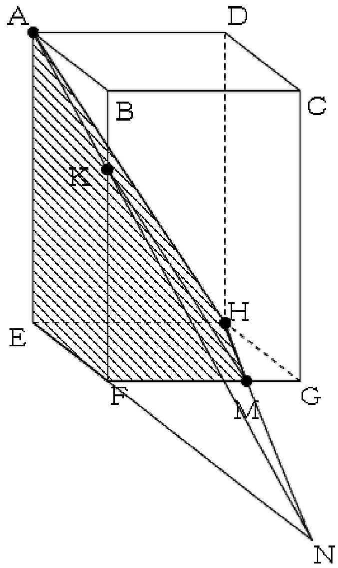
答え　４.５ cm

第１７回Ａ　$\boxed{1}$(2)

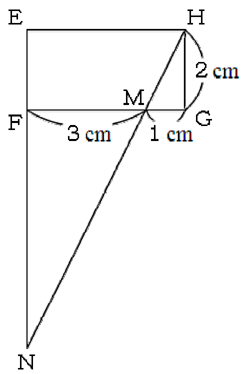
直方体を，３つの点Ａ，Ｋ，Ｆを通る平面で切り分けたときの，点Ｆをふくむ立体は，右の斜線部分になる。



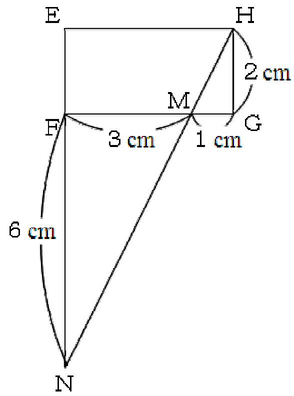
右図のように，ＥＦをＦの方向に，ＨＭをＭの方向に伸ばす。ぶつかった点をＮとすると，



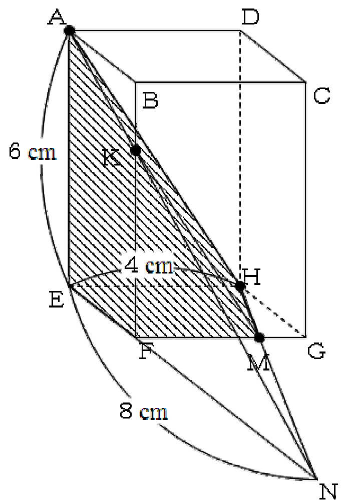
下の面には，右図のようにクロス形がある。
ＦＭの長さはＧＭの長さの３倍だから，
ＦＮの長さもＧＨの長さの３倍になって，
２×３＝６ (cm)となる。



右図のようになることがわかったので，
ＥＮの長さは，２＋６＝８（cm）になる。

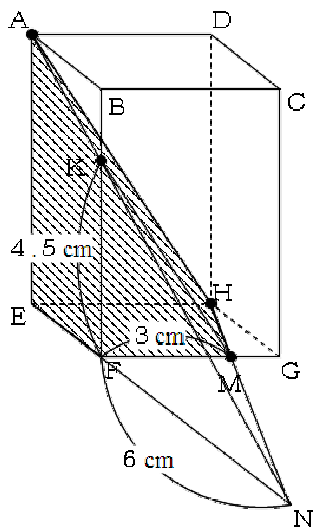


右図において，
三角すいＡ－ＥＨＮの体積は，
底面積が　４×８÷２＝１６（cm^2），
高さは６ cm であるから，
１６×６÷３＝３２（cm^3）。



三角すいＫ－ＦＭＮの体積は，
底面積が　３×６÷２＝９（cm^2），
高さは４.５ cm であるから，
９×４.５÷３＝１３.５（cm^3）。

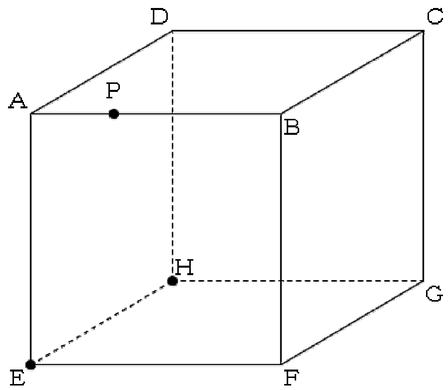
よって，斜線部分の体積は，
３２－１３.５＝１８.５（cm^3）。



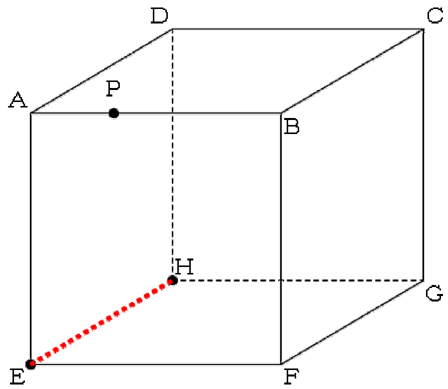
答え　１８.５ cm^3

第１７回Ａ　$\boxed{2}$(1)

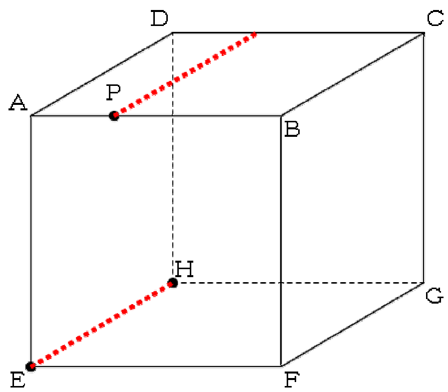
まず，点Ｐ，Ｅ，Ｈを通る平面で切ってみる。



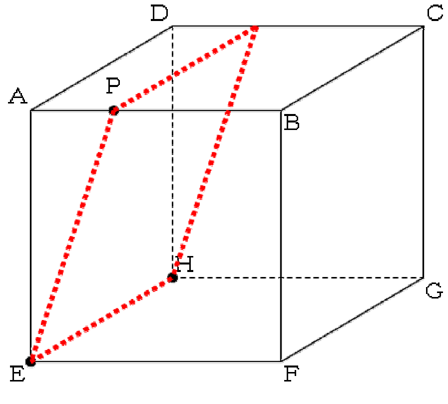
ＥからＨまでは，辺ＥＨにそって切ることができる。



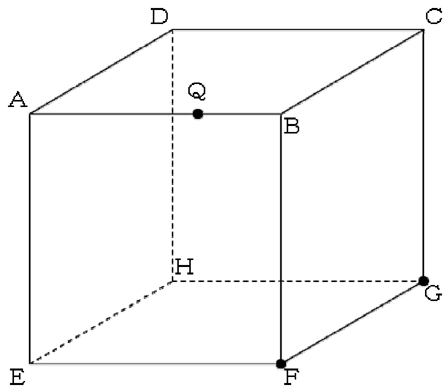
上の面には，Ｐから，ＥＨと平行な線を引くことができる。



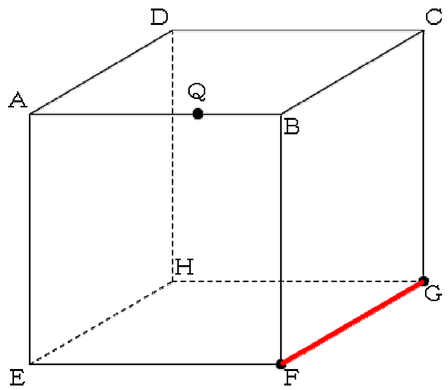
前の面は，ＥからＰまで切り口の線をひくことができて，それと平行に，後ろの面にも切り口の線をひくことができる。



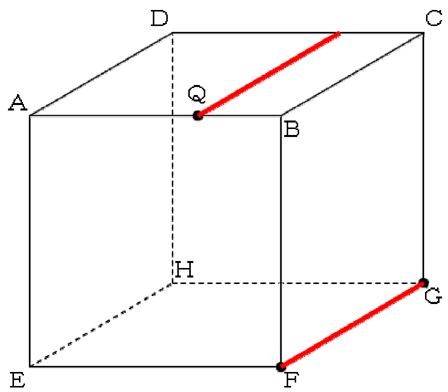
次に，Ｑ，Ｆ，Ｇを通る平面で切ってみる。



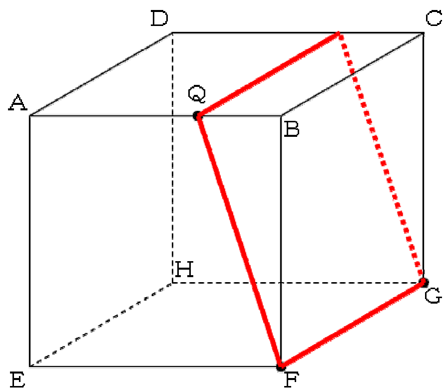
Ｇから F までは，辺ＧＦにそって切ることができる。



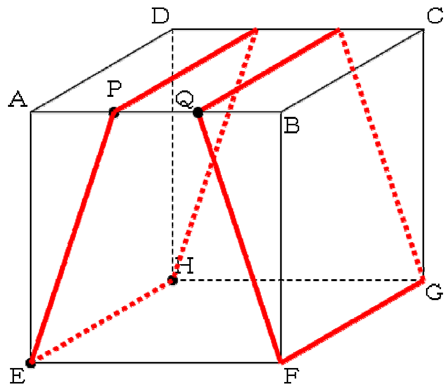
上の面には，Ｑから，ＦＧと平行な線を引くことができる。



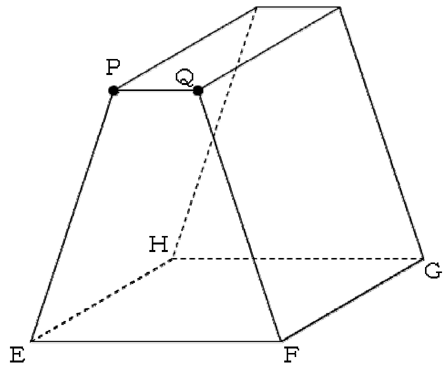
前の面には，ＦからＱまで切り口の線を引くことができ，後ろの面にもＦＱと平行になるように，Ｇから切り口の線をひくことができる。



右の図のように，立方体は３つの部分に分けられたことになる。



３つの立体のうち，一番大きい立体は，右図の立体である。



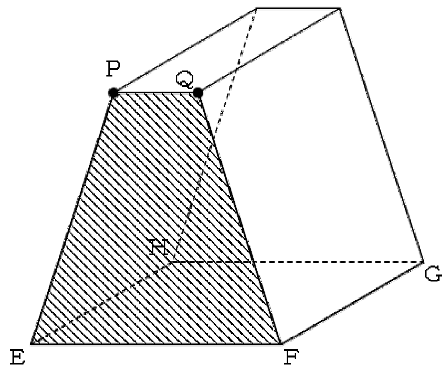
この立体の底面積は，右図の斜線部分の台形である。

この台形の面積は，

$(2+6)\times 6\div 2=24$ (cm²)。

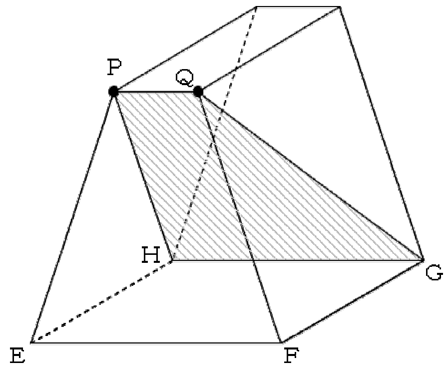
この立体の体積は，

$24\times 6=144$ (cm³)。

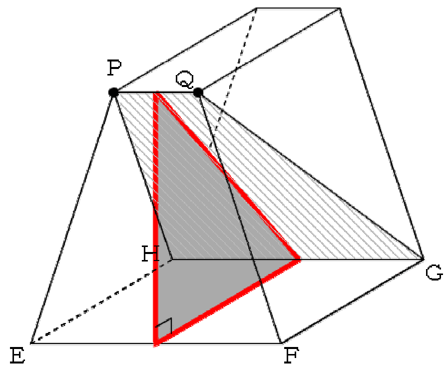


答え　１４４ cm³

第１７回Ａ　$\boxed{2}$(2)



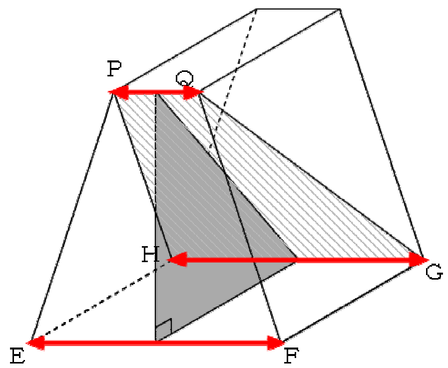
右図のように，立体を，斜線部分の面で切ったときの，頂点Ｆがある方の立体の体積を求める問題である。



この立体の底面を，右図の影をつけた三角形であると考えることが，この問題のポイントである。

この三角形は，底辺が６ cm，高さも６ cm なので，面積は，

６×６÷２＝１８(cm²)である。



底面積が１８ cm² になることはわかったが，さて高さはどのように求めるのだろうか。

右の図のように，高さとみなされるのは，ＰＱ＝２ cm，ＨＧ＝６ cm，ＥＦ＝６ cm の３種類ある。

そこで，この３種類の平均を，この立体の高さとみなす。

よって，高さは，

$(2+6+6)\div 3=\dfrac{14}{3}$(cm)　となる。

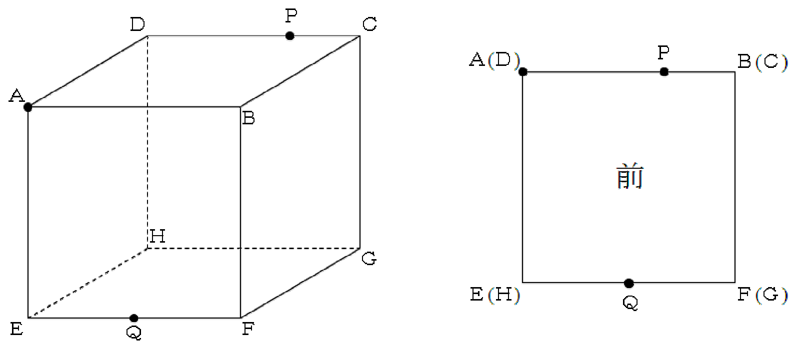
底面積が１８ cm² で，高さが $\dfrac{14}{3}$cm だから，この立体の体積は，

$18\times\dfrac{14}{3}=84$(cm²)。

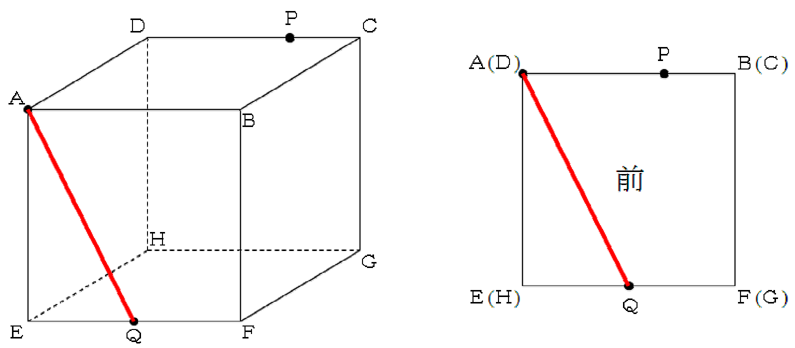
答え　８４ cm²

第１７回Ａ　$\boxed{3}$(1)

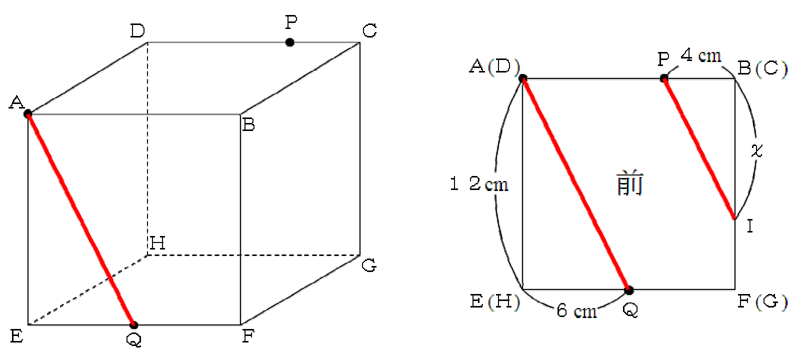
このような問題では，見取り図だけでなく，前から見た図や，右から見た図，あるいは上から見た図なども活用しよう。



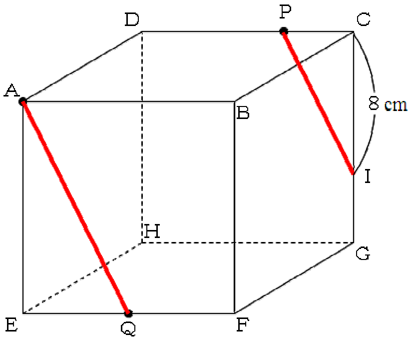
３点Ａ，Ｐ，Ｑのうち，ＡとＱは結んでよい。前の面にあるから。

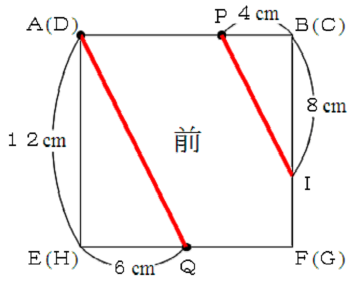


ＡＱと平行に，後ろの面はＰを通って切り口の線を書くことができる。
このとき，ＡＥ＝１２ cm，ＥＱ＝６ cm，ＰＣ＝４ cm であることに注意。
ＢＩ＝χ cm とすると，

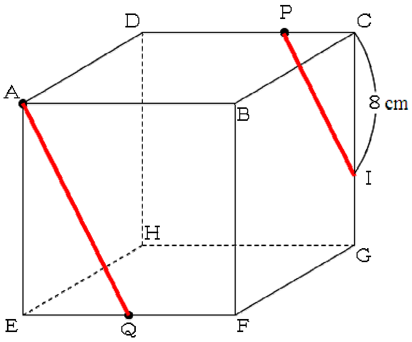


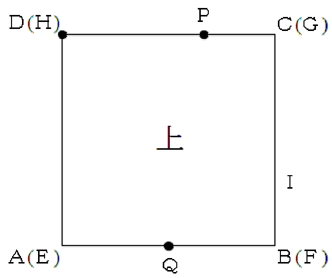
$12:6=\chi:4$ だから，$\chi=8$ cm になる。



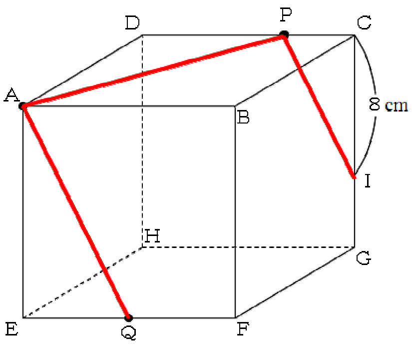


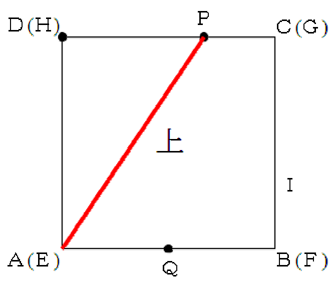
次に，上から見た図を書いてみよう。



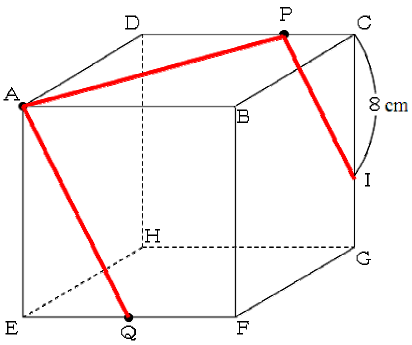


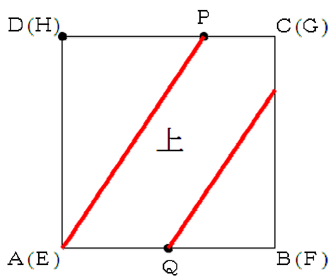
ＡからＰまでは，上の面にあるので書いてよい。



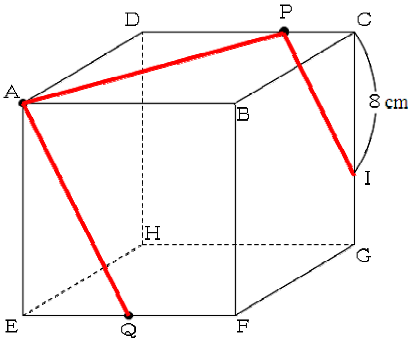


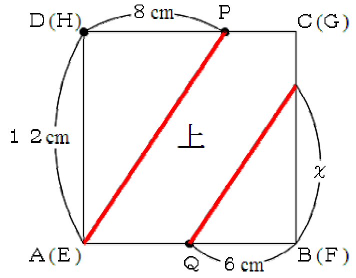
ＡＰと平行に，下の面にＱから線をひく。



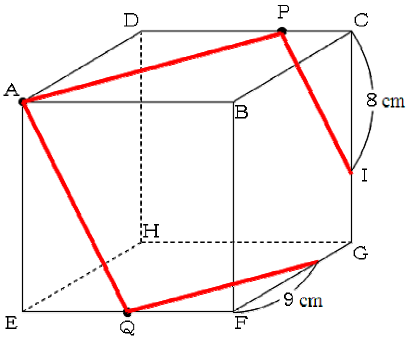


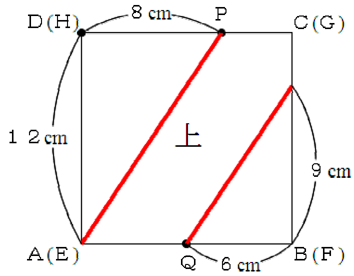
下の図のように，長さを書きこむ。
１２：８＝χ ：６ だから，



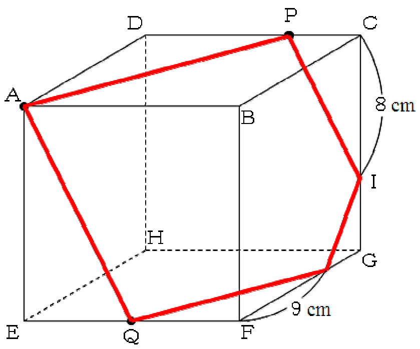


χ ＝９ cm になる。





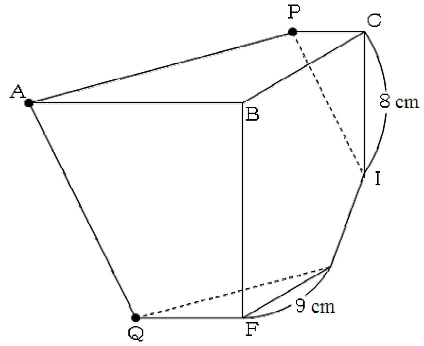
切り口の図形は，右図のように，五角形になる。



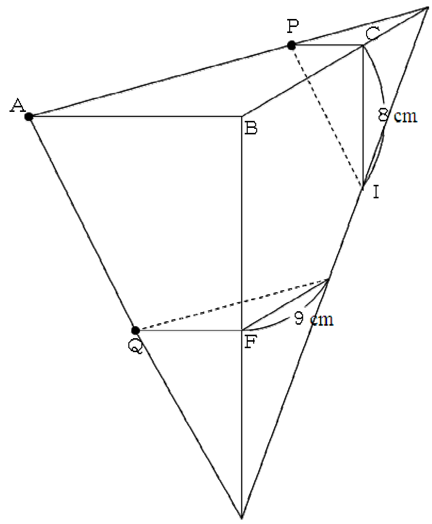
答え　五角形

第１７回Ａ　$\boxed{3}$(2)

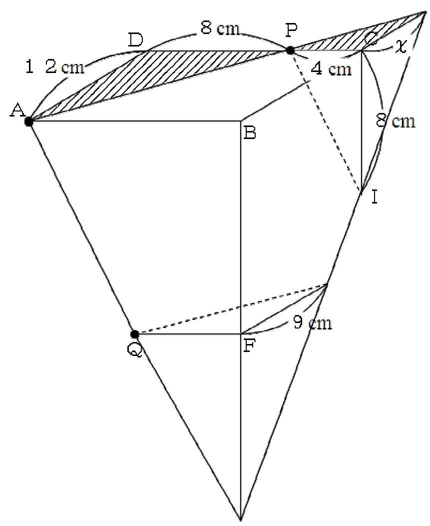
右図の立体の体積を求める問題。
いかにもむずかしそうに見えるが，



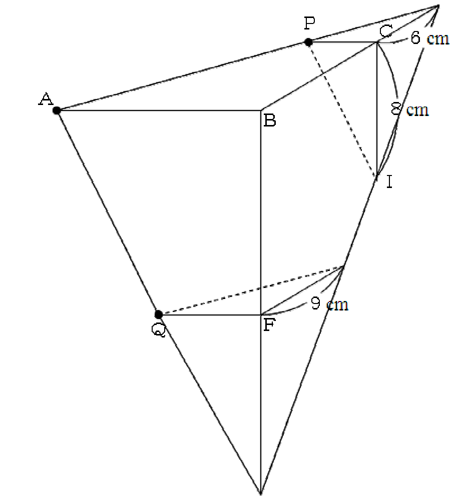
右図のように線をのばす。
大きい三角すいから，小さい三角すいを２個引けば，求めたい立体の体積になる。



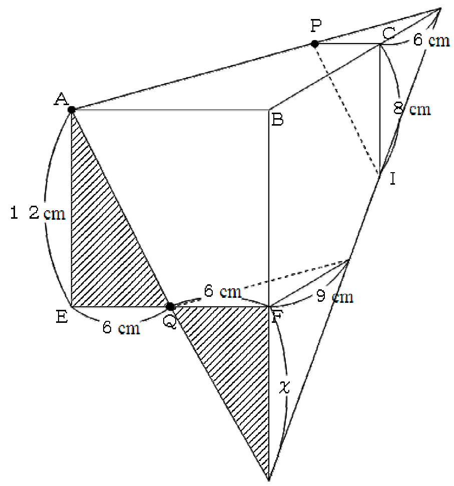
体積を求めるためには，いろいろな部分の長さがわからなければならない。
そのためには，クロス形やピラミッド形を有効に利用する。
まず，右図のようにクロス形を利用して，
８：４＝１２：χ　だから，



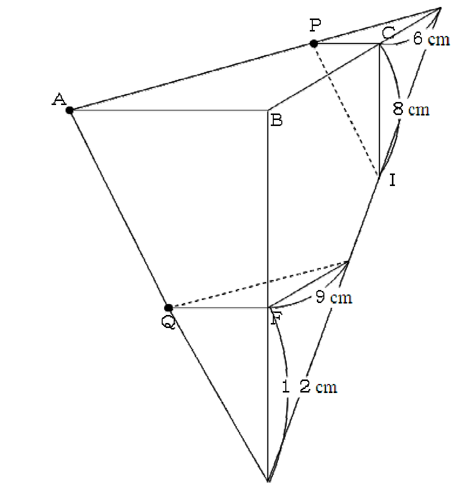
χは６ cm になる。



また，右図のようにクロス形を利用して，
斜線部分の三角形どうしは合同だから，
χの長さは，



１２ cm になる。

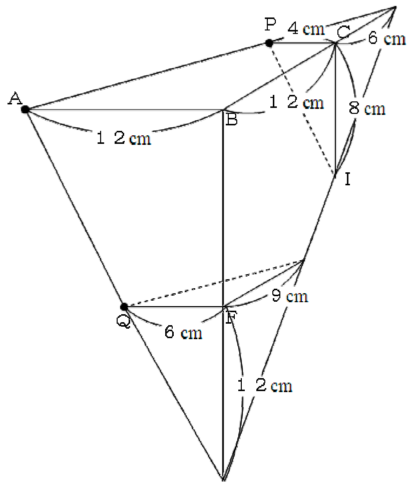


これで，右図のように，いろいろな部分の長さがわかったので，いよいよ体積を求めることにする。

まず，右図全体の体積は，

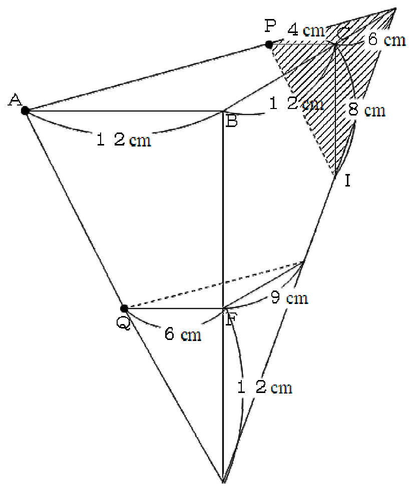
１２×（１２＋６）÷２×（１２＋１２）÷３

＝８６４（cm^3）。



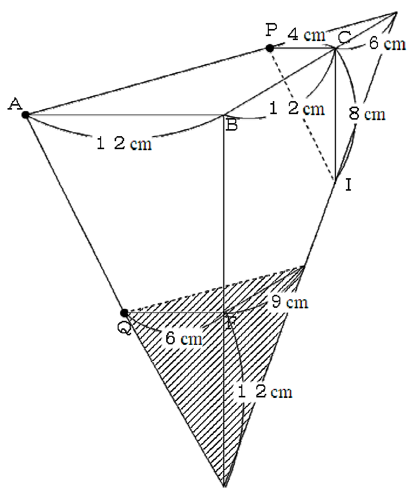
右図の斜線部分の三角すいの体積は，

４×６÷２×８÷３＝３２（cm^3）。



右図の斜線部分の三角すいの体積は，

６×９÷２×１２÷３＝１０８（cm^3）。



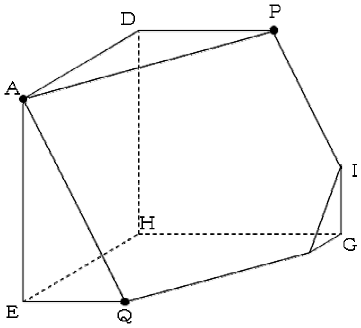
よって，求める立体の体積は，８６４－（３２＋１０８）＝７２４（cm^3）。

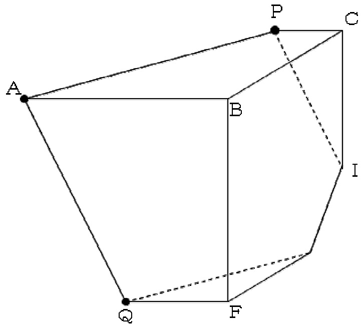
答え　７２４ cm^3

第１７回Ａ　$\boxed{3}$(3)

立方体は，右図のような２つの立体に分かれた。

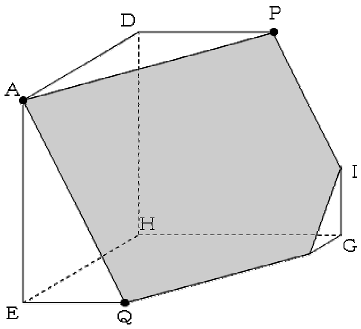
この２つの立体の，表面積の差を求める問題である。

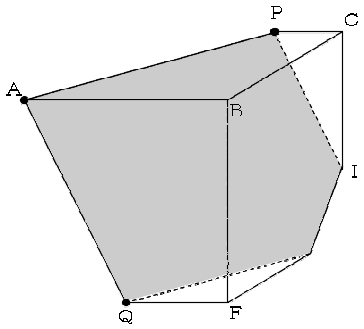




ところで，この２つの立体は，切り口の面の面積は同じなので，表面積の差には影響しない。

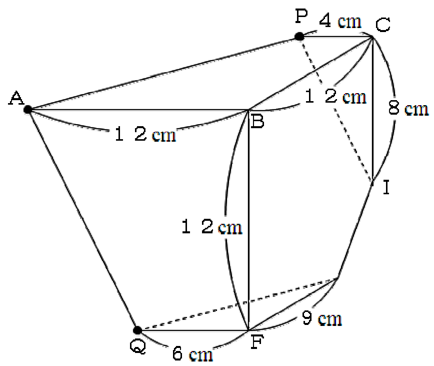
よって，切り口の面をぬかした表面積をそれぞれ求め，その差を答えればよい。





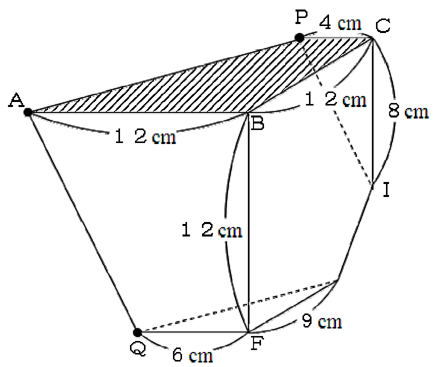
では，点Ｂをふくむ立体の表面積から求めることにする。

切り口の面をのぞくと，全部で５面ある。

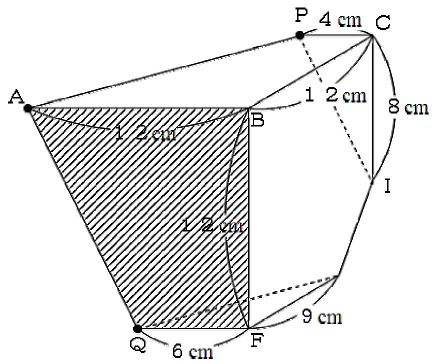


まず，右図の斜線部分の面は，台形なので，

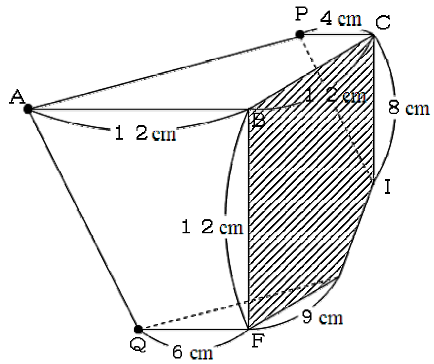
（４＋１２）×１２÷２＝９６（cm^2）。



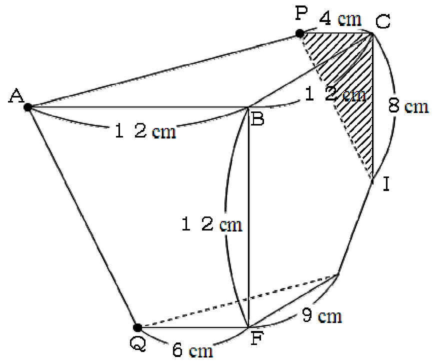
次に，右図の斜線部分の面は，やはり台形なので，
（１２＋６）×１２÷２＝１０８(cm²)。



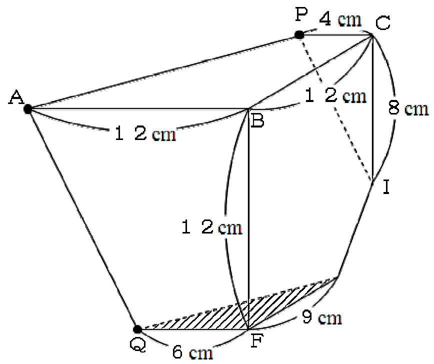
右図の斜線部分の面は，台形ではないことに注意。
正方形から，直角三角形をひいた残りなので，
１２×１２－（１２－９）×（１２－８）÷２
＝１３８(cm²)。



右図の斜線部分の面は，４×８÷２＝１６(cm²)。



右図の斜線部分は，６×９÷２＝２７(cm²)。



よって，点Ｂをふくむ立体の表面積(ただし切り口の面をのぞく)は，
９６＋１０８＋１３８＋１６＋２７＝３８５(cm²)。

点Ｂをふくまない方の立体の表面積は，マトモには求めない。

それよりも，まず立方体の表面積を，

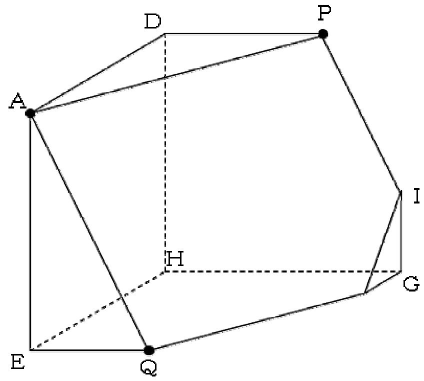
１２×１２×６＝８６４(cm^2)と求める。

立方体全体の表面積は８６４ cm^2　で，

点Ｂをふくむ立体の表面積は３８５ cm^2。

点Ｂをふくまない立体の表面積は，

８６４－３８５＝４７９(cm^2)。



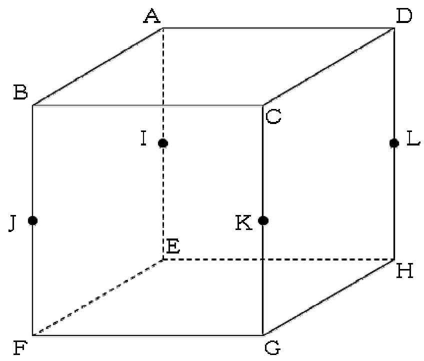
よって，２つの立体の表面積の差は，

４７９－３８５＝９４(cm^2)。

<u>答え　９４ cm^2</u>

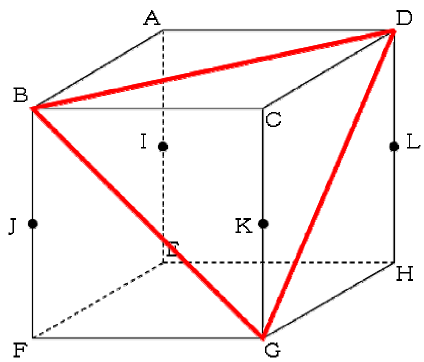
第１７回Ａ　$\boxed{4}$(1)

まず，切り口が正三角形になるようなカードの選び方を，１つでもいいから考えてみよう。

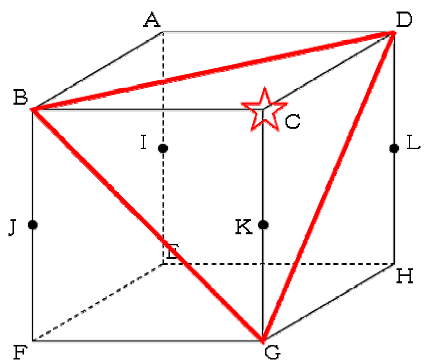


右図のように，Ｂ，Ｄ，Ｇの頂点を通るように切れば，切り口の形は正三角形になる。

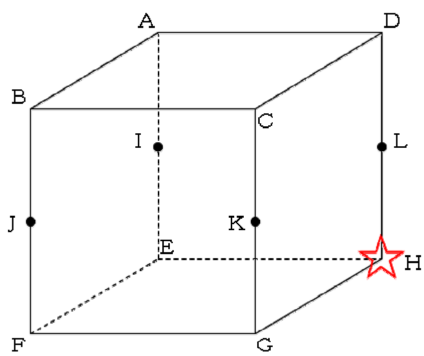
このように，立方体の３つの頂点を通るように切る以外には，切り口の形が正三角形になるように切り方はない。



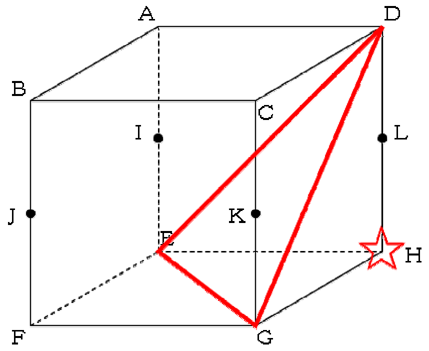
Ｂ，Ｄ，Ｇを通る切り方は，頂点Ｃを三角形の重心に持つような切り方である，とイメージする。



同じようにイメージすれば，たとえば右図の点Ｈを重心に持つように切り方は，

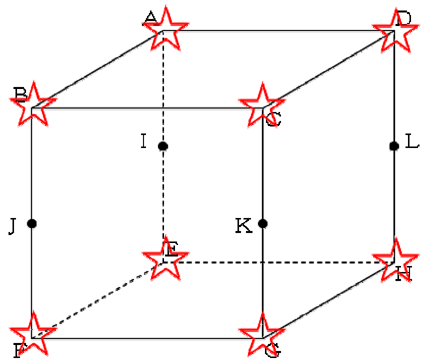


右図のように，点D，Ｅ，Ｇを通るように切った場合だということがわかる。



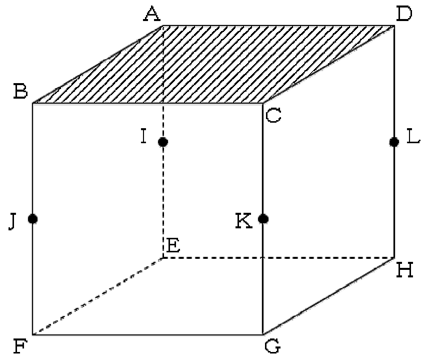
このようにして，ＡからＨまでの立方体の頂点が，それぞれ重心になるように正三角形をイメージすることができるので，切り口が正三角形になるようにカードの選び方は，立方体の頂点の個数と同じになる。

立方体の頂点は８個あるので，カードの選び方も８通りになる。



答え　８通り

第１７回Ａ　$\boxed{4}$(2)

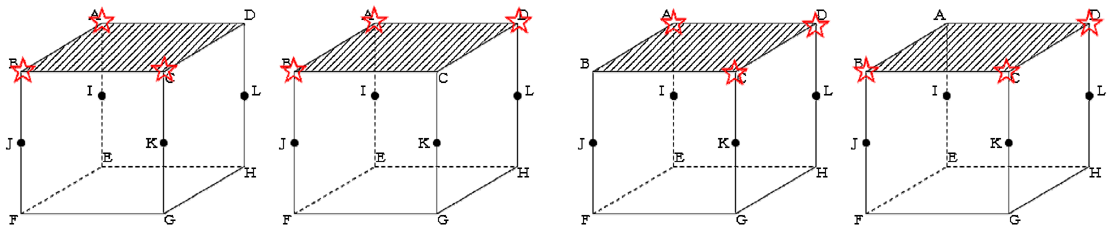


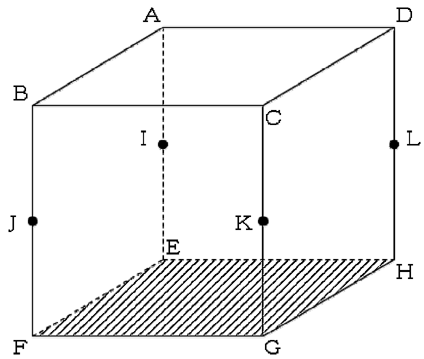
切り口ができないのは，たとえばＡ，Ｂ，Ｃというカードを選んだとき。

このときは，右図のように面ＡＢＣＤ(上の面)となってしまい，切り口ができなくなる。

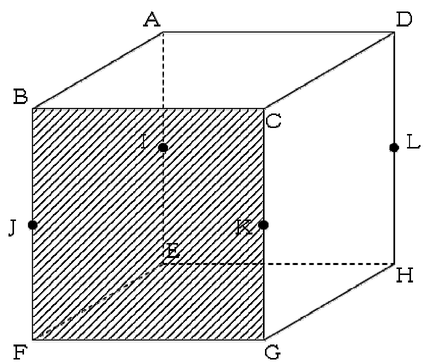
このように，切り口の面が立方体の中を通らず，面ＡＢＣＤのような，立方体の表面になってしまう場合が何通りあるかを考えればよい。

ところで，カードの選び方が，面ＡＢＣＤ(上の面)になってしまうような場合は，次のように４通りある。





カードの選び方が，面ＥＦＧＨ(下の面)になってしまうような場合も，同じように４通りある。

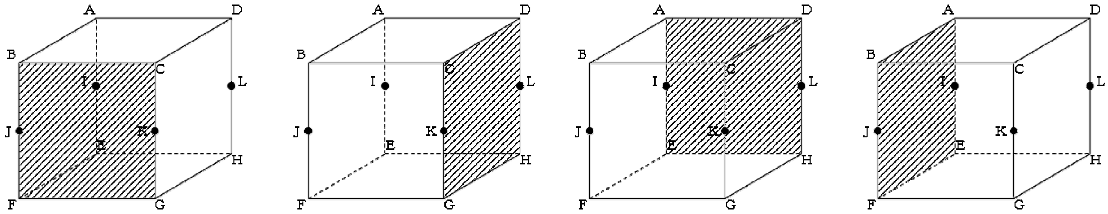


ところが，カードの選び方が，面ＢＣＧＦ(前の面)になってしまうような場合は，４通りではない。

その理由は，たとえば「Ｂ，Ｃ，Ｊ」というように，Ｊを使ったり，Ｋを使ったりする場合もあるからである。

面ＢＣＧＦになってしまうような場合は，
Ｂ，Ｃ，Ｇ，Ｆ，Ｊ，Ｋの６個の点の中から，
３個を選び出す場合だから，
６×５×４÷６＝２０(通り）ある。

前の面と同じようにして，右の面，後ろの面，左の面の場合も，２０通りある。



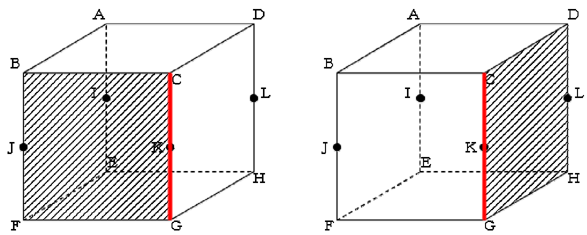
以上整理すると，

上の面と下の面　…　４通りずつ 前の面・右の面・後ろの面・左の面　…　２０通りずつ

全部で，４×２＋２０×４＝８８(通り)となる。

しかし，これが答えではない。その理由は次の通り。

前の面で２０通りと答えたときに，「B，C，G，F，J，Kの６個の中から３個選ぶ」と考えて，２０通りと求めた。その２０通りの中には，「C，G，K」という選び方も，当然入っている。

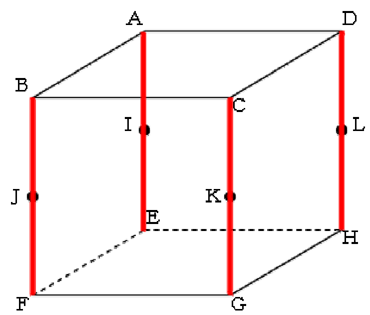


また，右の面で２０通りと答えたときには,「C，D，H，G，K，Lの６個の中から３個選ぶ」と考えて，２０通りになる。その２０通りの中には,「C，G，K」という選び方も，当然入っている。

つまり，全部で８４通りの中には,「C，G，K」という選び方が，ダブッて数えられているから，そのダブリの分を除かなければならない。

「C，G，K」の場合だけではなく,「D，H，L」「A，E，I」「B，F，J」の場合も，ダブッていることになる。

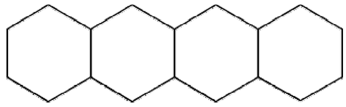
よって，全部で８８通りから，ダブリの４通りを除いて，８８－４＝８４



答え　８４通り

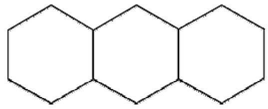
第１７回Ａ　$\boxed{5}$

ア

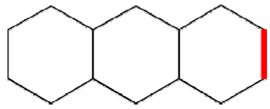


４つの正六角形がまっすぐ並んでいる場合は，右図アの１通り。

４つの正六角形のうち，３つがまっすぐ並んでいる場合は，



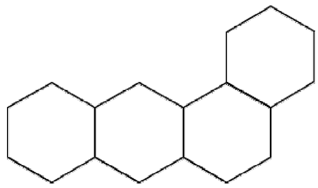
残り１つの正六角形を，右図の太線の部分にくっつける場合から，反時計回りに１つずつ考えていく。



右図の太線の部分にくっつけたら，図アと同じになるのでダメ。

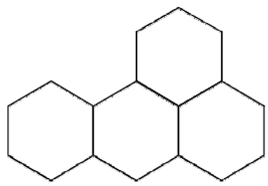
右図イの場合はＯＫ。これが２通り目。

イ

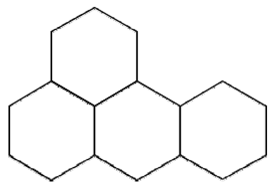


右図ウの場合もＯＫ。これが３通り目。

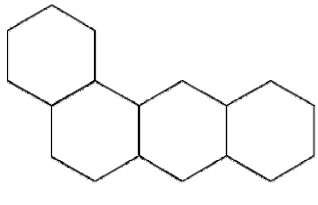
ウ



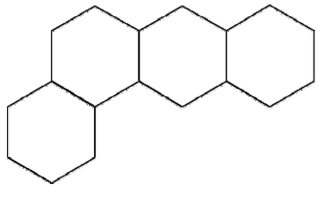
右図の場合は，左右にひっくり返せば図ウと同じになるのでダメ。



右図の場合も，左右にひっくり返せば図イと同じになるのでダメ。



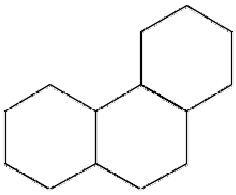
右図の場合は，回転させれば，図イと同じになるのでダメ。

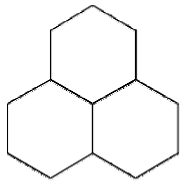


これ以上，１つの正六角形を反時計回りにくっつけていっても，回転させたら前と同じものが出てくるだけなので，意味がない。

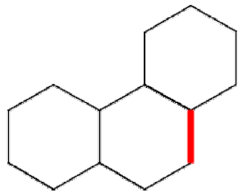
次に，４つの正六角形のうち，２つがまっすぐ並んでいる場合を考えることにする。

２つがまっすぐ並んでいる場合の，３つ目のくっつけ方には，下の２つの図の場合が考えられる。

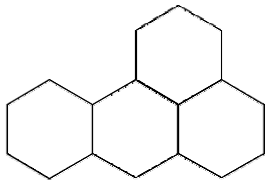




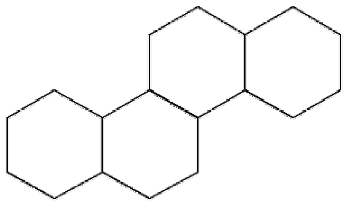
まず，右図の場合について考える。残り１つの正六角形を，右図の太線の部分から，反時計回りに１つずつ考えていく。



太線部分に正六角形をくっつけたのが右の図だが，これは，図ウと同じだから，ダメ。



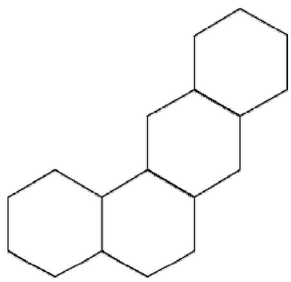
エ



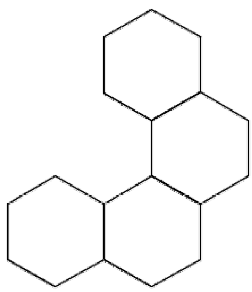
次に，右図エのようになる。これはＯＫ。

次に，右図のようになるが，これは図イをひっくり返して，回転させた図であることがわかりますか？

ということで，この図はダメ。



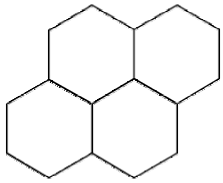
オ



次に，右図オのようになる。これはＯＫ。

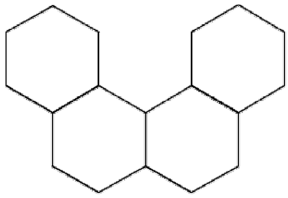
次に，右図カのようになる。これもＯＫ。

カ



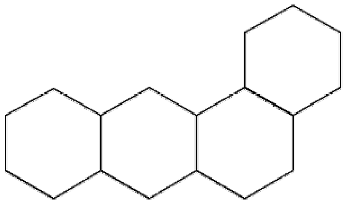
次に，右図キ。これもＯＫ。

キ

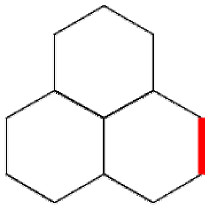


次に，右図のようになるが，これは図イと同じなのでダメ。

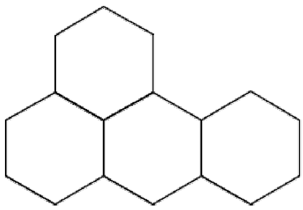
これ以上，１つの正六角形を反時計回りにくっつけていっても，回転させたら前と同じものが出てくるだけなので，意味がない。



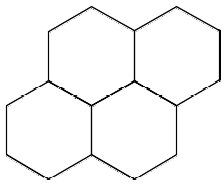
次に，右図の場合について考える。残り１つの正六角形を，右図の太線の部分から，反時計回りに１つずつ考えていく。



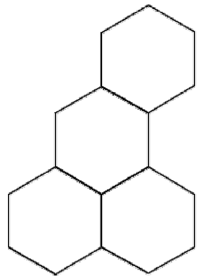
まず，右図のようになるが，これは図ウをひっくり返したものだからダメ。



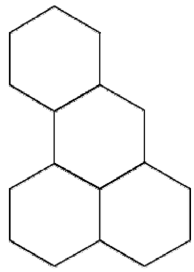
これは図カと同じなのでダメ。



右図は，図ウを回転させたものだから，ダメ。

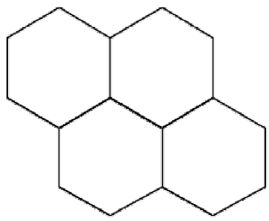


右図も，図ウをひっくり返して回転させたものなのでダメ。



これは，図カをひっくり返したもの。

これ以上，１つの正六角形を反時計回りにくっつけていっても，回転させたら前と同じものが出てくるだけなので，意味がない。



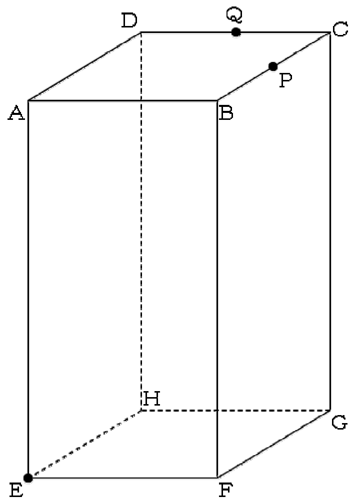
これで，すべての場合を考えたことになる。

図ア～図キの，７種類ができたことになる。

答え　７種類

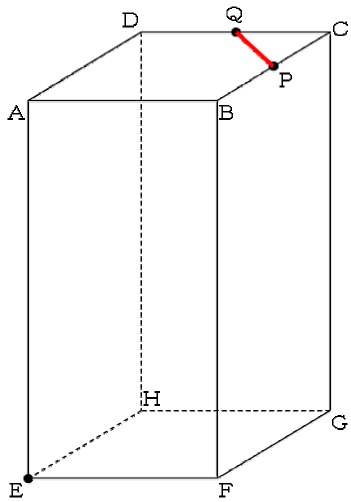
第１７回Ｂ　$\boxed{1}$(1)

Ｐから Ｑ，Ｑから Ｅ，Ｅから Ｐに切り口の線をひいて良いかどうかをチェックしていく。

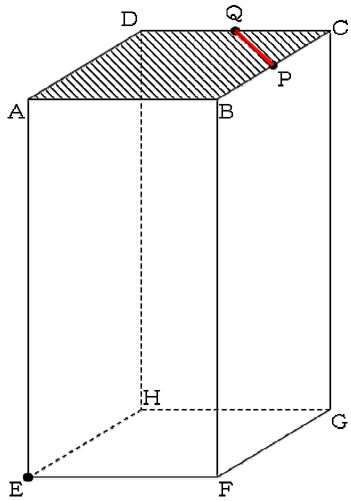


まず，Ｐから Ｑ。
これは，上の面にあるので，引いてよし。

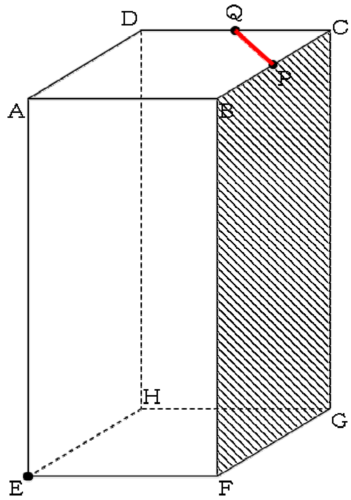
ところが，Ｑから Ｅ，Ｅから Ｐは，立体の内部を通るので，引いてはいけない



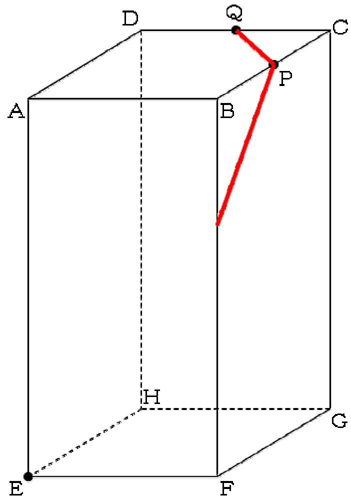
切り口の線が１本しか引けない場合は，どの面になら引いて良いかを考えていく。
まず，Ｐから，どこに向けて引いて良いかを考えてみる。
Ｐは，上の面のはじにあるが，



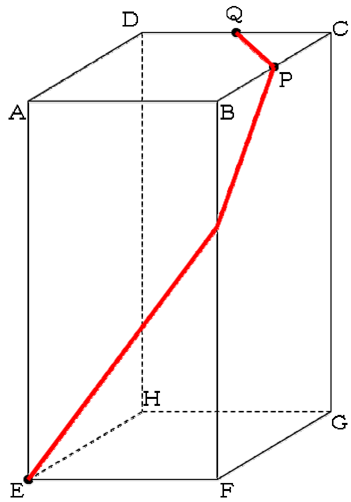
Ｐは，右の面のはじにある，とも言える。
Ｐから引く切り口の線は，すでに上の面には(ＰＱという線が)引いてあるのだから，これ以上は引けない。
そこで，右の面に，Ｐから切り口の線を引くようにする。
しかもその線は，そのあとＥに向かうように引くことになるのだから，



右図のように引き，

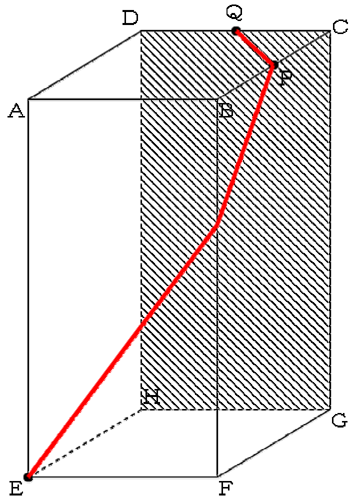


そして，前の面を通ってＥにたどり着くように引けばよい。

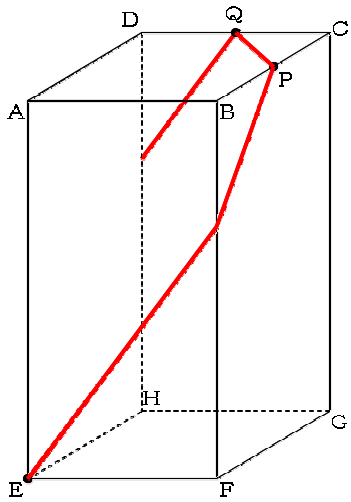


同じようにして，こんどはQからＥまでの切り口の線の引き方を考える。

Qは上の面のはじにあるが，後ろの面のはじにあるとも言えるので，後ろの面に切り口の線を引き，

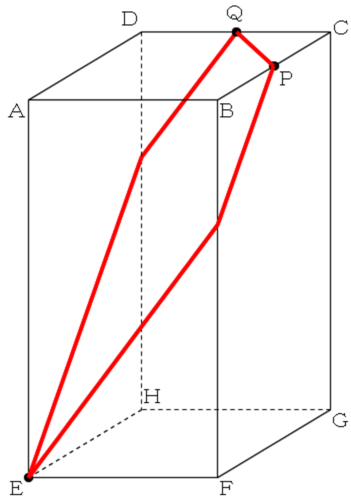


右図のようになる。



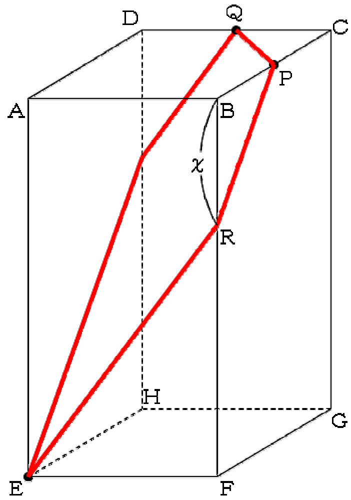
さらに，Ｅにむかって切り口の線を引いて，右図のようになる。

答え

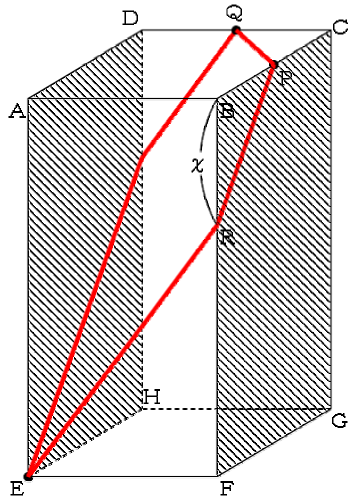


第１７回Ｂ　$\boxed{1}$(2)

右図の，χの長さを求める問題である。

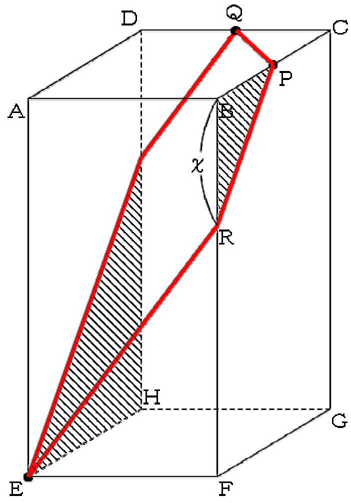


右の面と左の面は平行なので，切り口の線も平行。

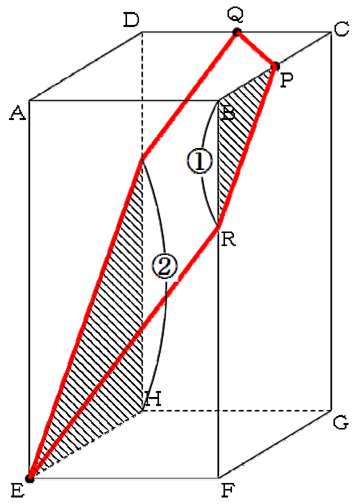


よって，右図の斜線部分の三角形どうしは，相似になる。

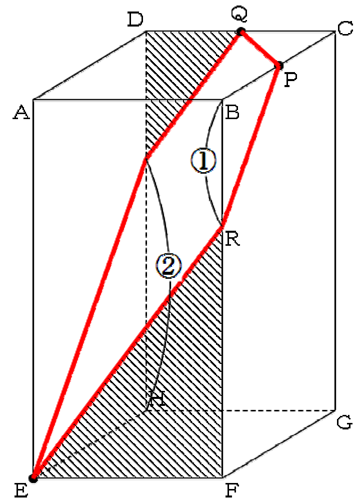
ＰはＢＣのまん中なので，ＢＰ：ＥＨ は，１ ： ２ になる。



よって，右図のように，高さの比も１：２。

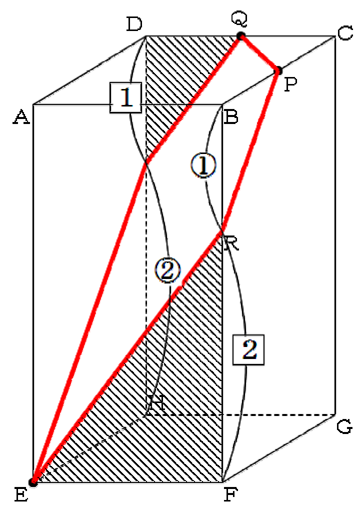


同じように，前の面と後ろの面が平行なので，
切り口の線も平行。
よって，右図の斜線部分の三角形どうしは，
相似になる。

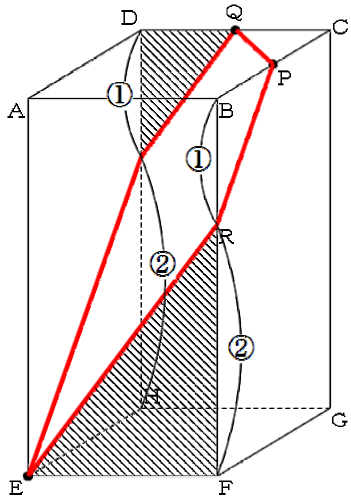


ＱはＤＣのまん中の点だから，ＤＱ：ＥＦ は，
１：２。
よって，三角形の高さも，１：２ になる。

ここで，ＢＦの長さとＤＨの長さは同じなので，
① ＋ $\boxed{2}$ ＝ $\boxed{1}$ ＋ ②
よって，① ＝ $\boxed{1}$
つまり，$\boxed{1}$ は①にしてよいし，$\boxed{2}$は②にしてよい。



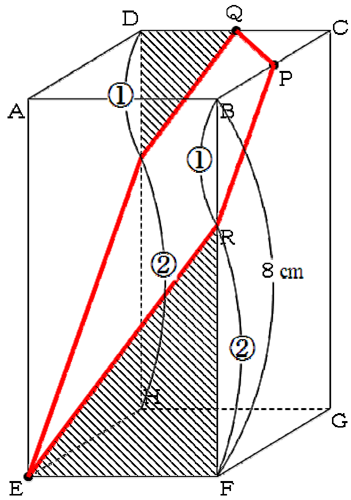
よって，右図のようになる。



ＢＦの長さは８ cm で，それを１ ： ２に分けるところに，点Ｒがある。

ＢＲの長さは，

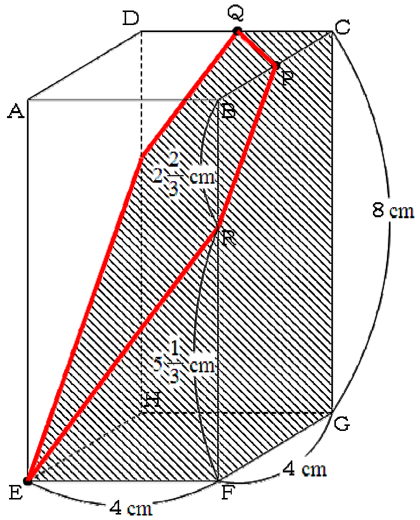
$８÷（１＋２）×１＝2\frac{2}{3}$(cm)。



答え　$2\frac{2}{3}$cm

第１７回Ｂ　$\boxed{1}$(3)

頂点Ａをふくまない立体は，右図の斜線部分である。

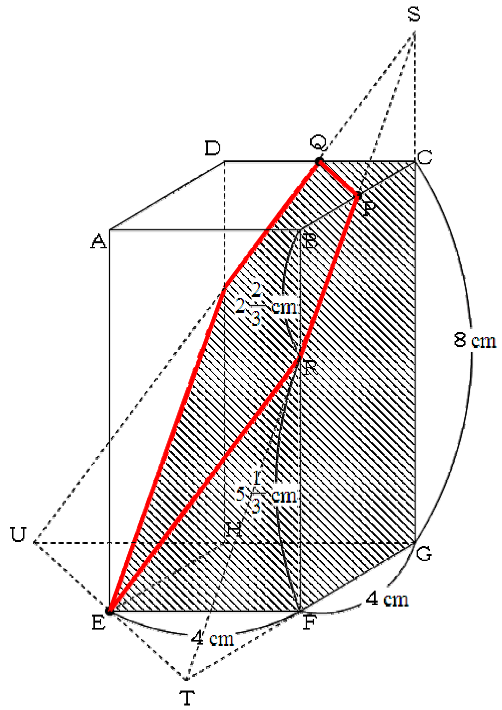


(2)で，ＢＲの長さは$2\dfrac{2}{3}$cm だとわかった。

ＲＦの長さは，$8-2\dfrac{2}{3}=5\dfrac{1}{3}$(cm)。

右図のように辺をのばして，大きな三角すいを作る。

この三角すいから，よけいな小さな三角すいを引けば，答えが求められる。



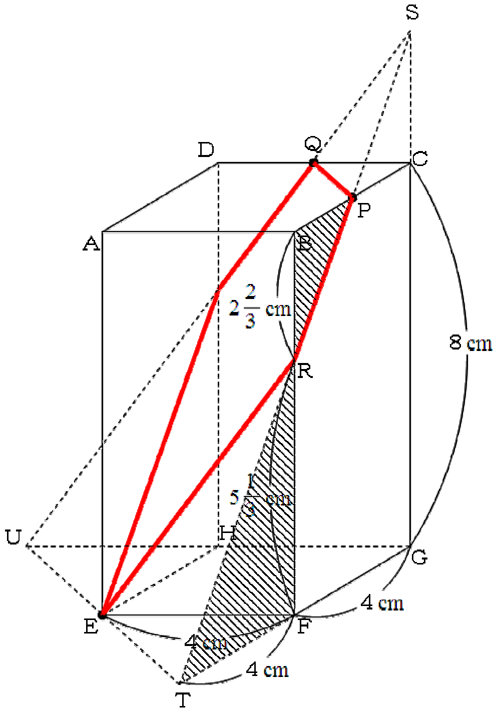
右図の斜線部分は，クロス形になっている。

ＢＲ：ＲＦ＝$2\frac{2}{3}$：$5\frac{1}{3}$＝１：２

よって，ＢＰ：ＦＴも，１：２。

ＢＰは２ cm なので，

ＦＴ＝２×２＝４ (cm)。

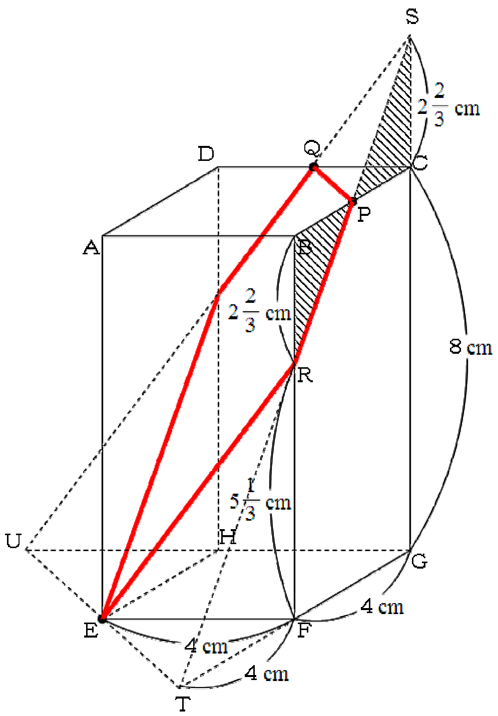


次に，右図の斜線部分のようなクロス形を考えると，

ＢＰ：ＰＣ＝１：１　だから，

ＢＲ：ＣＳも，１：１。

よって，ＳＣの長さは，$2\frac{2}{3}$cm になる。

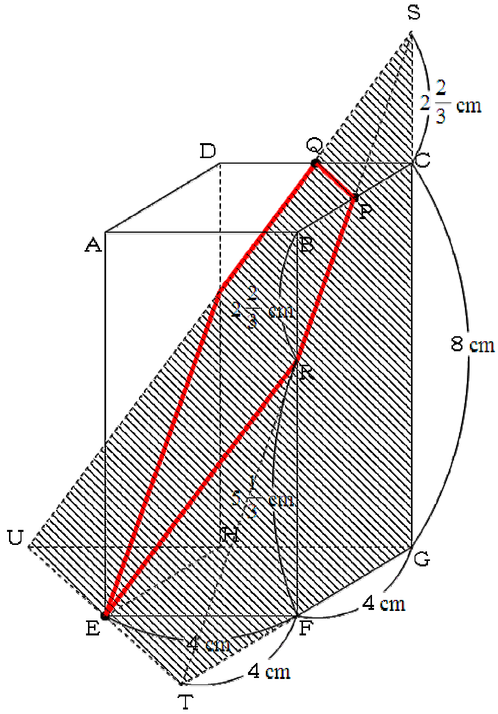


右図の斜線部分の三角すいにおいて
底面の三角形の底辺は　４＋４＝８ (cm) で，
高さも８ cm。

三角すいの高さは，$8+2\dfrac{2}{3}=10\dfrac{2}{3}$ (cm)

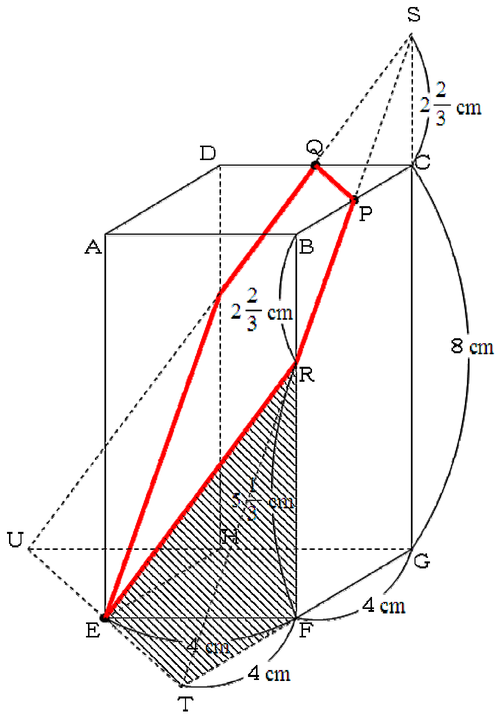
よって，斜線部分の三角すいの体積は，

$8\times8\div2\times10\dfrac{2}{3}\div3=113\dfrac{7}{9}$ (cm³)。



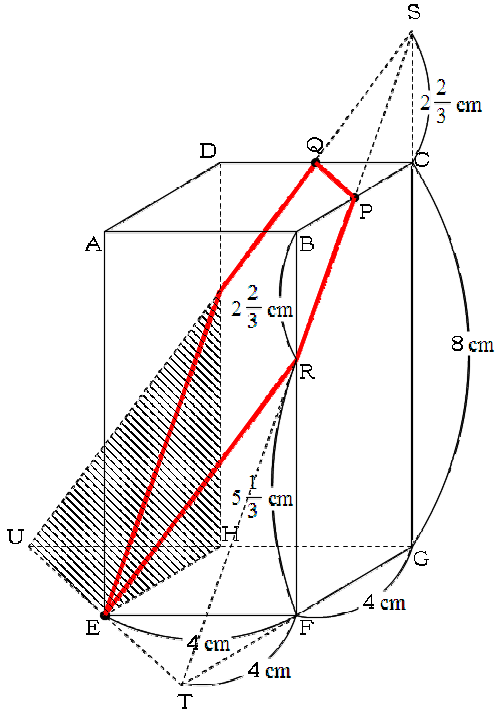
また，右図の斜線部分の三角すいの体積は，

$4\times4\div2\times5\dfrac{1}{3}\div3=14\dfrac{2}{9}$ (cm³)。



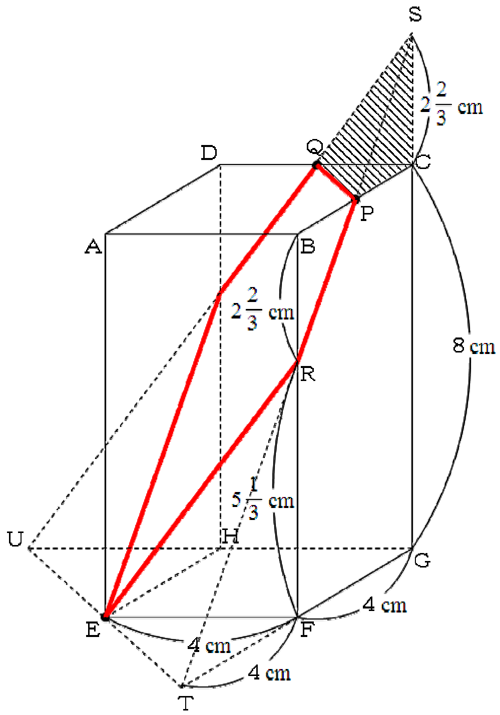
右図の斜線部分の三角すいも同じで，

$14\frac{2}{9}\mathrm{cm}^3$。



右図の斜線部分の三角すいの体積は，

$2\times2\div2\times2\frac{2}{3}\div3=1\frac{7}{9}(\mathrm{cm}^3)$。



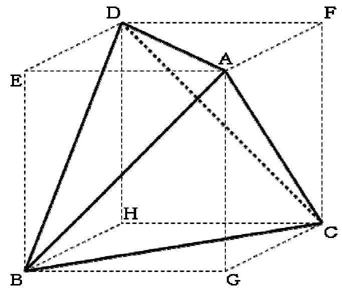
よって，求める体積は，

$113\frac{7}{9}-14\frac{2}{9}-14\frac{2}{9}-1\frac{7}{9}=83\frac{5}{9}(\mathrm{cm}^3)$。

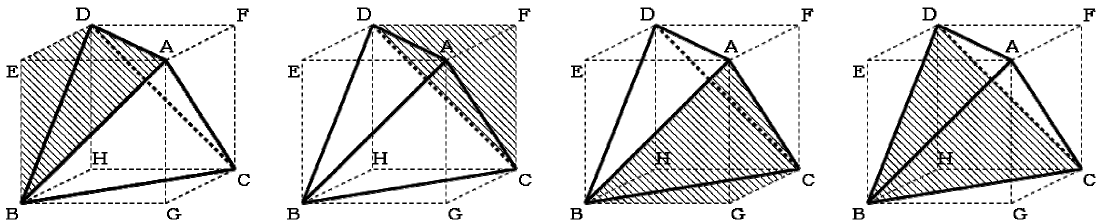
答え　$83\frac{5}{9}\mathrm{cm}^3$

第１７回Ｂ　$\boxed{2}$(1)

三角すいＡＢＣＤの体積は，「底面積×高さ÷３」の公式では求められない。



立方体から，次の４つの斜線部分(三角すい)を引くことによって，体積が求められる。



立方体の体積は，９×９×９＝７２９(cm³)で，

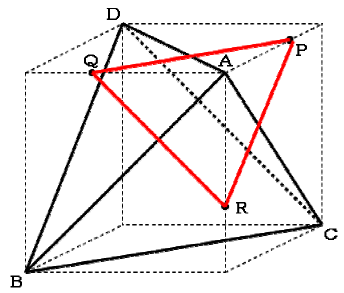
上の図の斜線部分(三角すい)１つの体積は，９×９÷２×９÷３＝１２１.５(cm³)だから，

７２９－１２１.５×４＝２４３(cm³)。

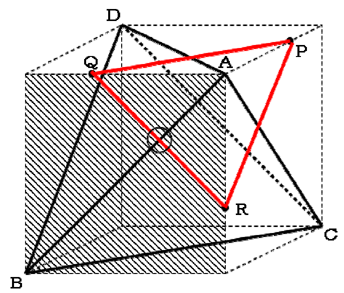
答え　２４３ cm³

第１７回Ｂ　$\boxed{2}$(2)①

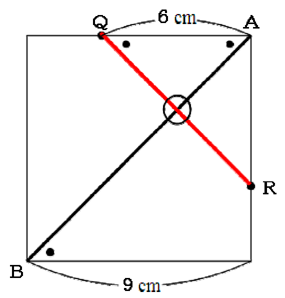
３点Ｐ，Ｑ，Ｒと通る平面は，右図のようになる。



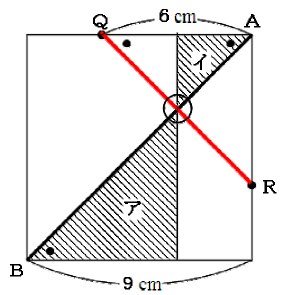
前の面では，右図の○の交点で，三角すいと平面ＰＱＲが交わっている。
（三角すいの辺ＡＢも前の面にあり，辺ＱＲも前の面にあることからわかる。）



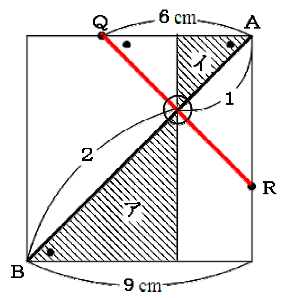
前の面だけを書くと，右の図のようになる。
図の●をつけた部分の角度はみな４５度なので，



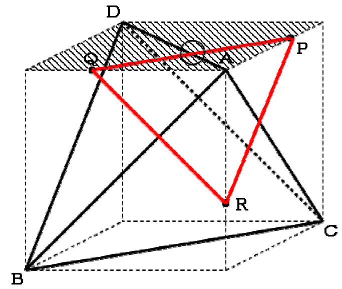
右図のア，イはどちらも直角二等辺三角形である。
イの底辺は，６÷２＝３(cm)で，
アの底辺は ９－３＝６(cm)だから，
アとイの底辺の比は，６：３＝２：１　である。



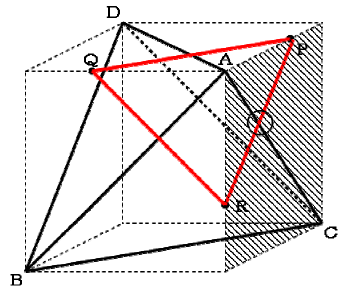
よって，斜辺(ななめの辺)の比も，２：１　である。



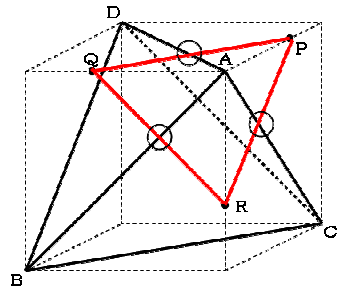
上の面では，右図の○の交点で，三角すいと平面ＰＱＲが交わっている。



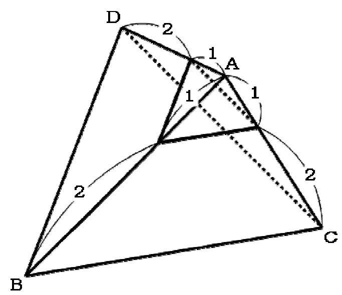
右の面では，右図の○の交点で，三角すいと平面ＰＱＲが交わっている。



三角すいと平面ＰＱＲが交わっているところは，右図の３つの○の交点になる。



よって，平面ＰＱＲは，三角すいを，右図のように切ることになる。



Ａがふくまれる部分は，三角すい全体とは相似になっていて，辺の長さの比は，（２＋１）：１＝３：１だから，体積の比は，

（３×３×３）：（１×１×１）＝２７：１

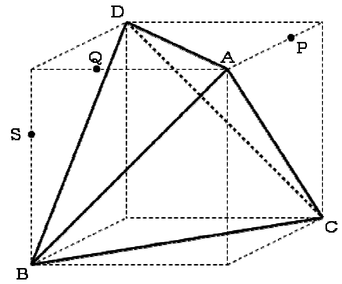
ところで，三角すい全体の体積は，(1)で求めたように２４３ cm^3 だから，Ａをふくむ立体の体積は，

２４３÷２７＝９（cm^3）となる。

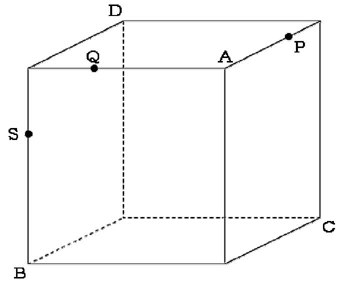
答え　９ cm^3

第１７回Ｂ　$\boxed{2}$(2)②

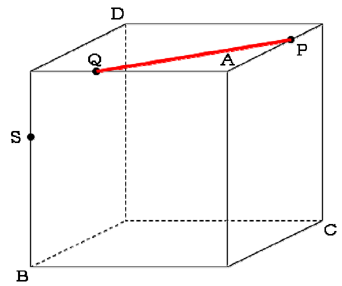
三角すいＡＢＣＤを，３点Ｐ，Ｑ，Ｓを通る平面で切り取る問題だが，



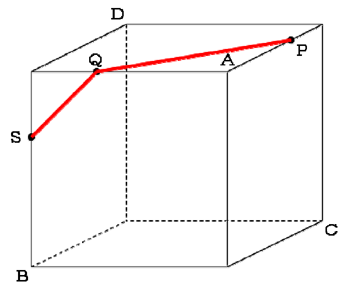
３点Ｐ，Ｑ，Ｓを通る平面とはどんな平面かを考えるために，まず，立方体をＰ，Ｑ，Ｓによって切り取ることを考える。



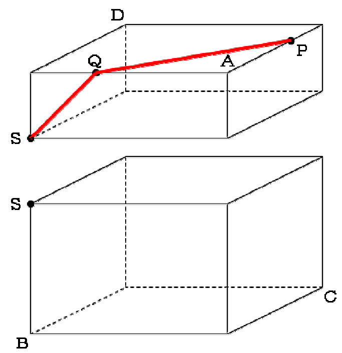
ＰからＱまでは，上の面を通るので，線を引くことができる。



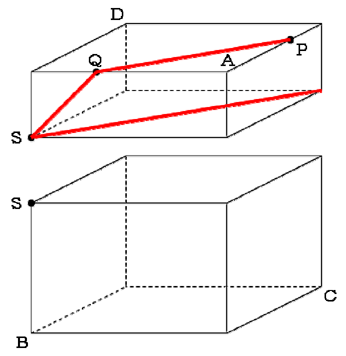
ＱからＳも，前の面を通るので，線を引くことができる。
しかし，ＰからＳまでは，立方体の内部を通るので，線を引くことはできない。



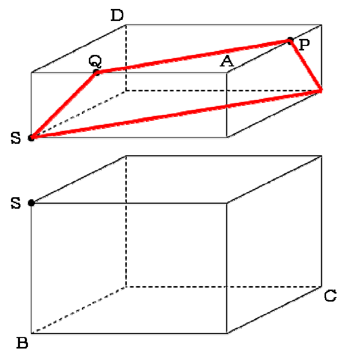
そこで，右図のように立方体を切り離す。



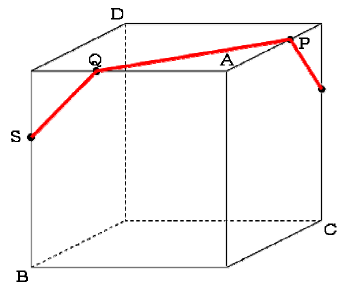
　すると，ＰＱと平行になるように，Ｓから
線を引くことができる。



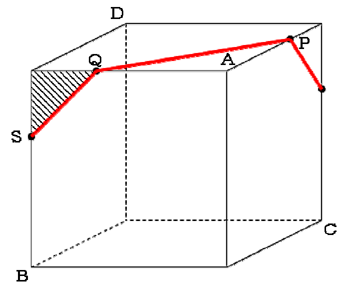
　右図のように，切り口の図形ができあがる。



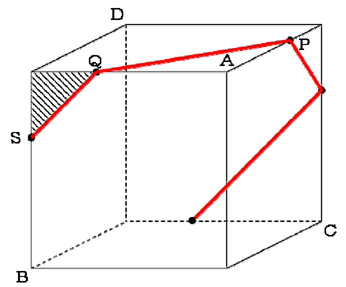
　切り離した立方体を，また元通りにくっつける。



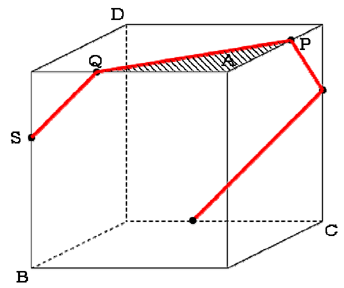
　前の面と後ろの面は平行なので，



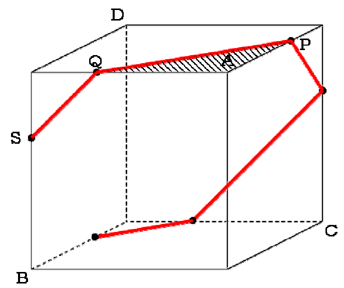
　ＱＳと平行になるように，後ろの面にも
切り口の線を引く。



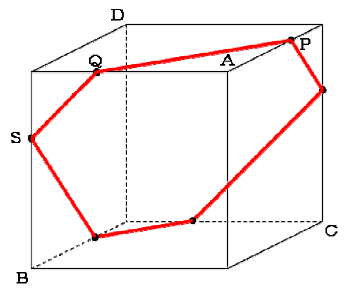
上の面と下の面は平行なので，



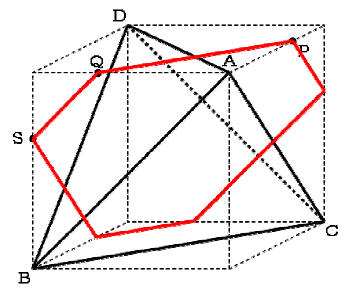
ＰＱと平行になるように，下の面にも切り口の線を引く。



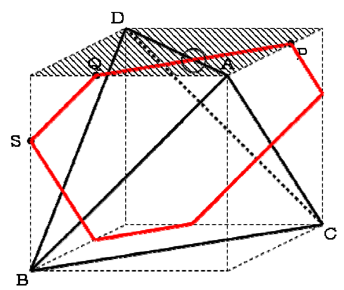
右図のように，切り口の平面ができあがる。



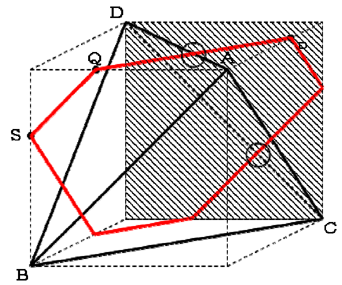
ではいよいよ，三角すいＡＢＣＤは，切り口の平面によってどのように切り取られるかを，考えていこう。



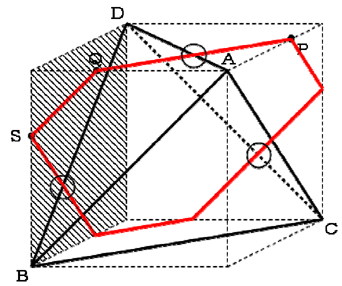
上の面では，右図の○の交点で，三角すいと切り口の平面が交わっている。



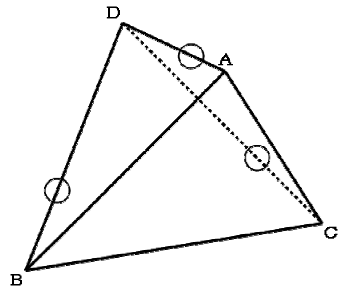
後ろの面では，右図の○の交点で，三角すいと切り口の平面が交わっている。



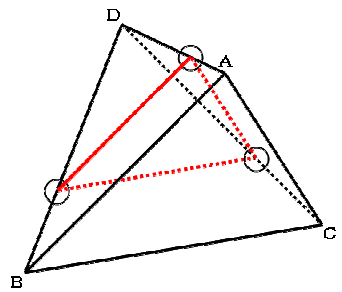
左の面では，右図の○の交点で，三角すいと切り口の平面が交わっている。



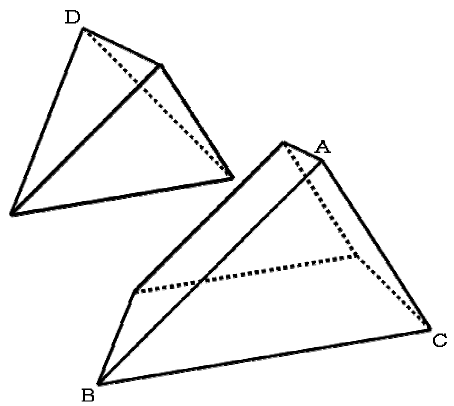
三角すいと切り口の平面とが交わっているところは，右図の３つの○の交点になる。



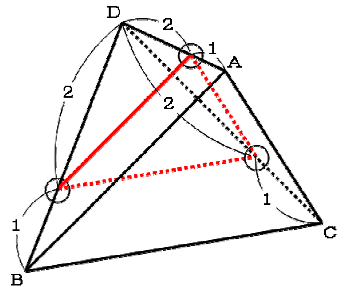
よって，切り口の平面は，三角すいを，右図のように切ることになる。



三角すいは，右図のような２つの立体に分かれる。



　Ｄがふくまれる部分は，三角すい全体とは相似になっていて，辺の長さの比は，２：(２＋１)＝２：３だから，体積の比は，
(２×２×２)：(３×３×３)＝８：２７
　ところで，三角すい全体の体積は，(1)で求めたように２４３ cm^3 だから，Ｄをふくむ立体の体積は，
　２４３÷２７×８＝７２(cm^3)となる。

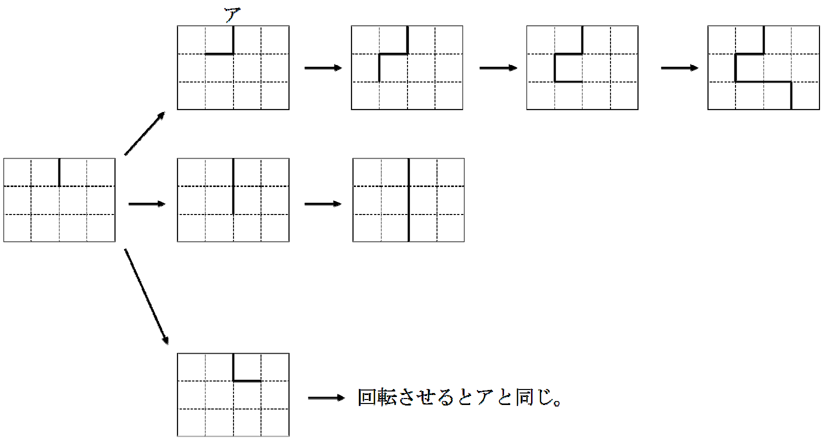


　よって，Ａをふくむ立体の体積は，２４３－７２＝１７１(cm^3) となる。

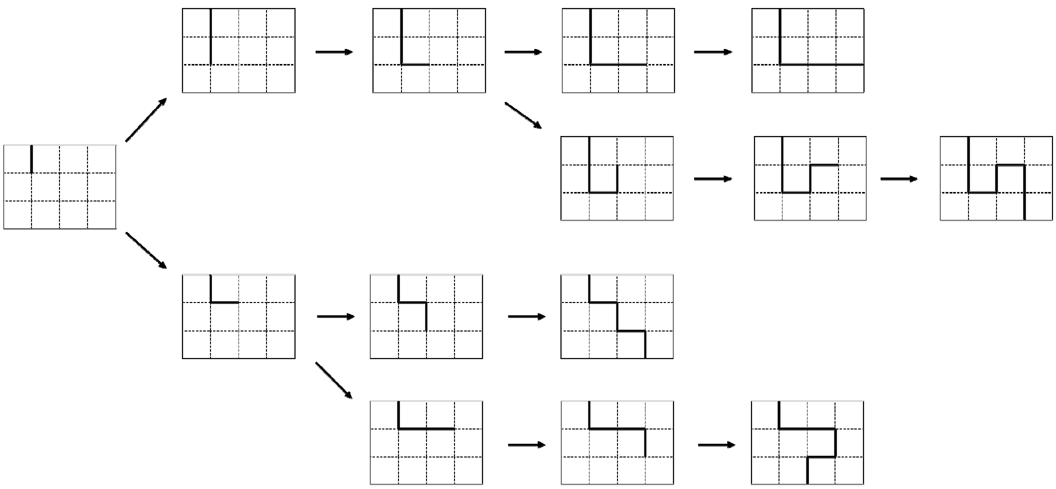
<u>答え　１７１ cm^3</u>

第１７回Ｂ　$\boxed{3}$(1)

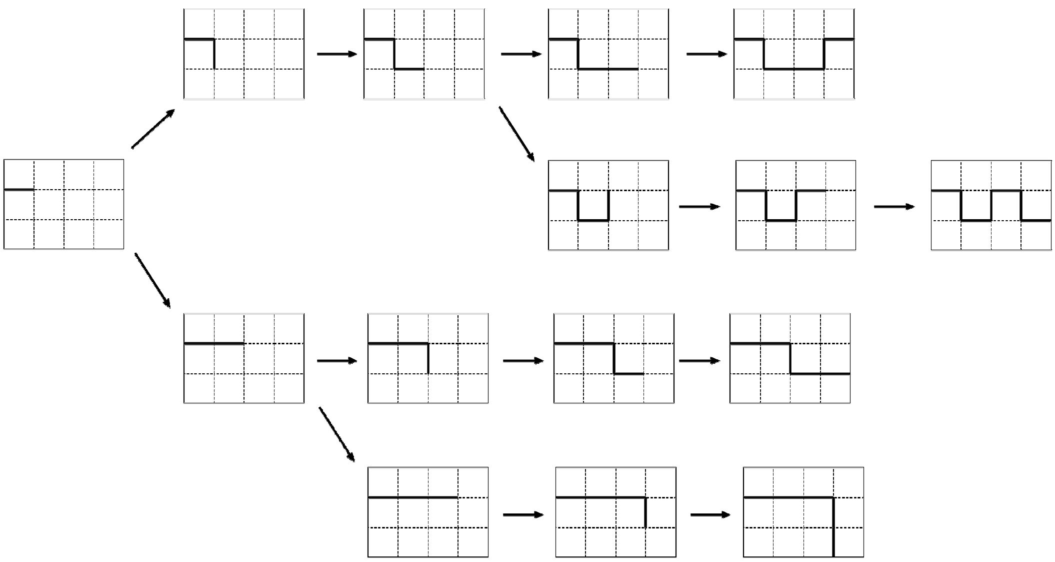
①



②



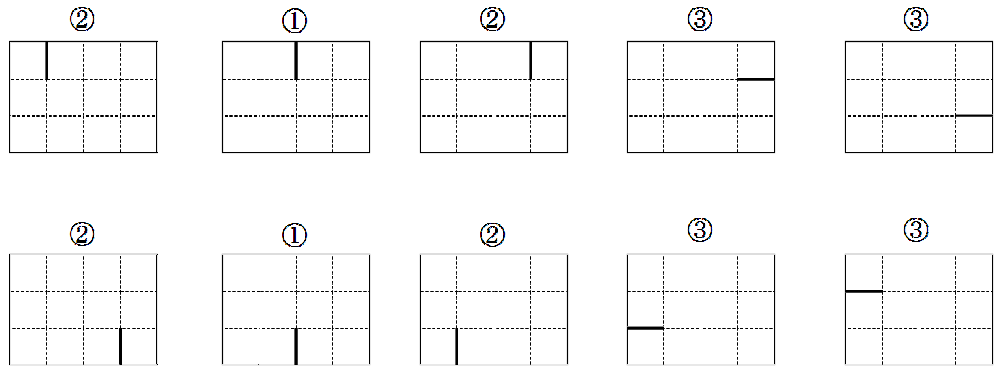
③



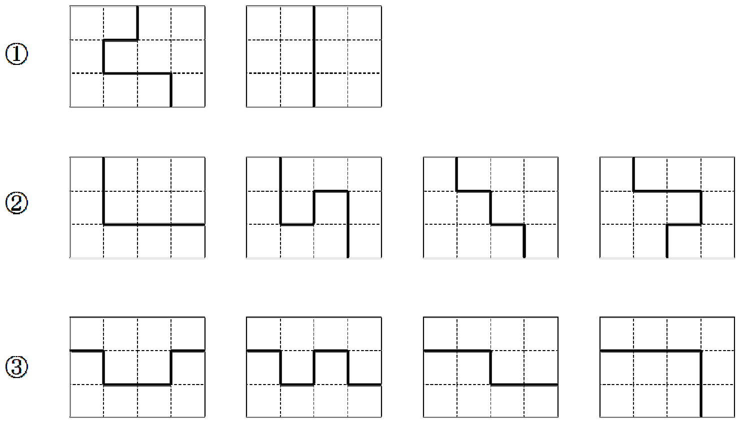
答え　①　２通り　　　②　４通り　　　③　４通り

第１７回Ｂ　3(2)

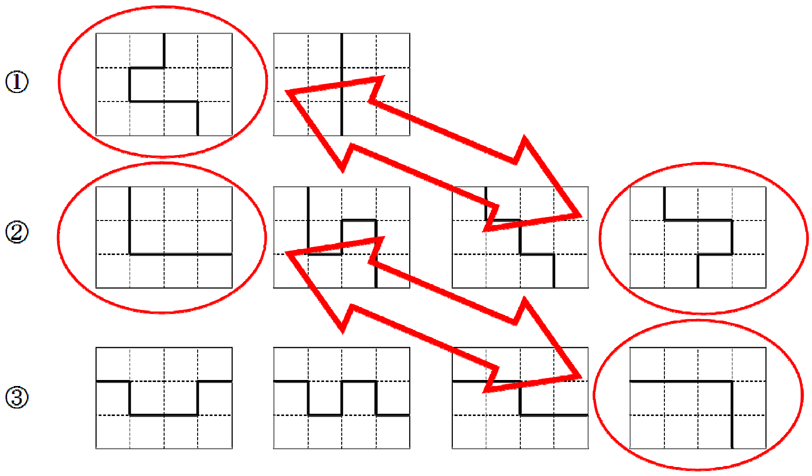
次の図のように，紙を切るときの，最初のハサミの入れ方は，(1)の①～③だけしかない。



(1)では，①が２通り，②が４通り，③も４通りだった。



全部で，２＋４＋４＝１０(通り)になりそうだが，実は，この１０通りのうち，まったく同じ切り分け方がある。

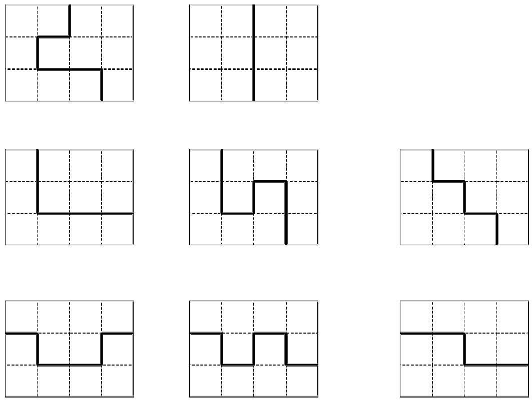


よって，１０－２＝８(通り)となる。

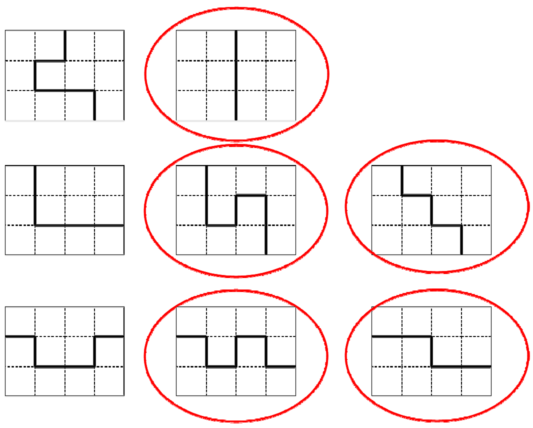
答え　８通り

第１７回Ｂ　$\boxed{3}$(3)

(2) では，紙を切り分ける方法が，全部で８通りあることがわかった。



このうち，次の○でかこったものが，ぴったりと重ね合わせることができる方法である。
全部で５通りになる。



<u>答え　５通り</u>

第１７回Ｂ　$\boxed{4}$(1)

正七角形の，一番上の頂点から，他の頂点に対角線を引いてみる。
すると，まず右の図１のような対角線が引ける。これが１通りめ。

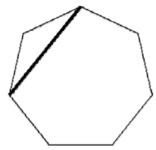


図１

右の図２のような対角線も引ける。これが２通りめ。

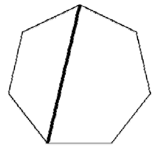
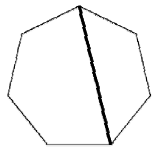
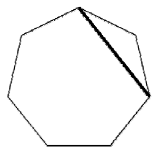


図２

右の図の対角線は，図２とまったく同じ長さなので，カウントしない。



右の図の対角線も，図１とまったく同じ長さなので，カウントしない。

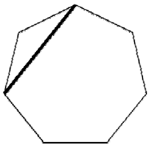
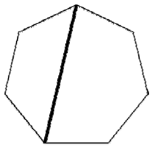


他の頂点から対角線を引いても，図１・図２と同じ長さの対角線のみなので，対角線の長さは２通りしかない。

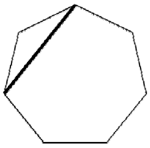
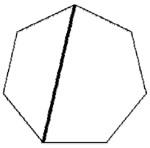
答え　２通り

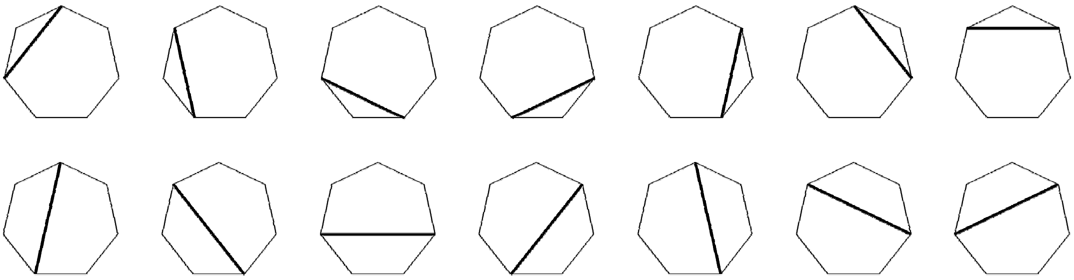
※応用編の問題なのに，こんなに簡単な問題が出題されているのはなぜだろうか。
　その理由は，(2)で，(1)の結果を利用するからだ。

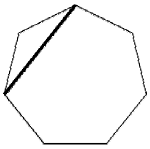
第１７回Ｂ　$\boxed{4}$(2)

(1)によって，正七角形の対角線は，ととの２パターンしかないことがわかった。

ところで，Ｎ角形の対角線の本数は，（Ｎ－３）×Ｎ÷２　だから，正七角形では，（７－３）×７÷２＝１４(本)になる。

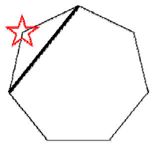
その１４本は，パターンが７本と，パターンが７本。



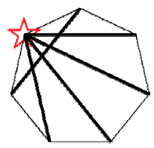
ここで，という対角線について，考えてみる。

この対角線に，他の対角線を引くことによって，交点は何個できるだろうか。

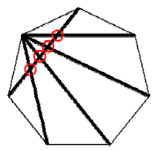
この対角線に交わるような対角線は，右図の☆の頂点から引けばよい。



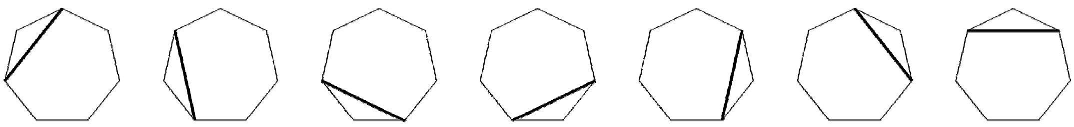
☆の部分からは，右図のように４本の対角線が引けて，

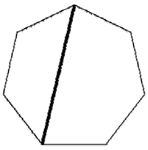


４つの交点ができる。

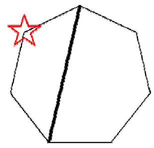


下の図のいずれの場合にも，４つずつ交点ができるので，全部で　４×７＝２８(個)。

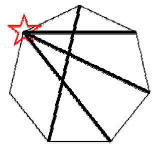


次に，という対角線について，考えてみる。

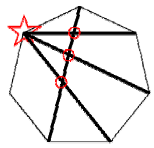
この対角線に，他の対角線を引くことによって，交点は何個できるだろうか。
この対角線に交わるような対角線には，まず右図の☆の頂点から引くような対角線がある。



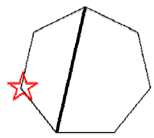
☆の部分からは，右図のように３本の対角線が引けて，



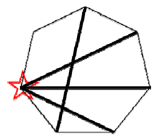
３つの交点ができる。



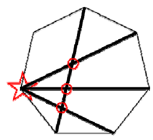
また，右図の☆の頂点からの対角線も，



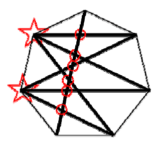
同じように３本の対角線が引けて，



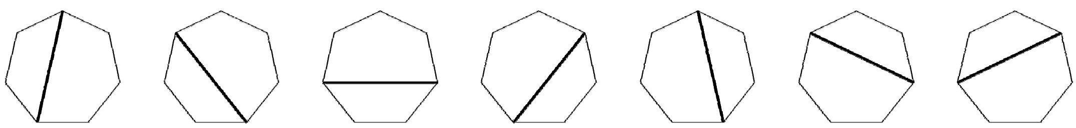
３つの交点ができる。



全部で，６つの交点ができることになる。

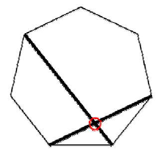


下の図のいずれの場合にも，６つずつ交点ができるので，全部で ６×７＝４２(個)。

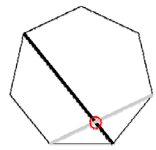


それぞれのパターンの交点の個数を合計すると，２８＋４２＝７０(個)になるが，
答えは７０個ではない。

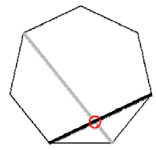
その理由を説明するために，例として右図のような交点について，考えてみる。



この交点は，右図の太い対角線のときに数えているし，



右図の太い対角線のときも，数えている。

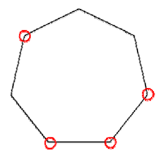


つまり，どの交点も，ダブッて数えていることになる。
よって，実際の交点の個数は，７０÷２＝３５(個)になる。

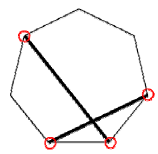
答え　３５個

（別解）

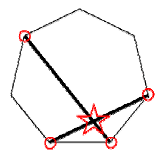
正七角形には，頂点が７つある。
この７つの頂点のうち，４つを選んで，



対角線を２本引くと，



交点が１つ決まる。



７つの頂点のうち，どの４つの頂点を選ぶかによって，交点が決まるわけだから，「７つ中４つを選ぶ」問題と同じになる。

よって，(７×６×５×４)÷(４×３×２×１)＝３５(通り)。

ただし，この方法は，「３本以上(３本もふくむ)の対角線が，１つの点に交わる」ような正多角形の場合には使えない。

交点の数を簡単に求めるような公式は存在しない。