演習問題集・6年上・第2回・応用問題のくわしい解説

すぐる学習会

1 (1)

ワンポイント 数列は, 1 からではなく 0 から始まっていることに注意しましょう。

0,1,2 の 3 個で作られる数は,三進数です。

三進数は、3になるとくり上がる数です。

たとえば、金貨・銀貨・銅貨があったとして、銅貨1枚は1円だったとします。

すると、2 円は銅貨 2 枚になり、3 円は銅貨 3 枚になりますが、銅貨 3 枚は、銀貨 1 枚と取り替えることができると考えるのです。 つまり、銀貨 1 枚は、3 円の価値があるわけです。

同じようにして、銀貨 3 枚は、金貨 1 枚と取り替えることができると考えます。銀貨 1 枚は 3 円の価値があったのですから、金貨 1 枚は、 $3\times3=9$ (円)の価値があります。

たとえば、「201という三進数の数を十進数に直してください。」という問題があったとします。

このときは、「201」という三進数の数を、「金貨が 2 枚、銀貨が 0 枚、銅貨が 1 枚」というように置き換えて考えます。金貨、銀貨、銅貨は 1 枚あたり、それぞれ 9 円、3 円、1 円の価値があるのですから、「201」は、 $9\times2+3\times0+1\times1=19$ (円)の価値がある、と考えるのです。

このように、N進数を十進数に直す問題は、「金貨・銀貨・銀貨・銅貨などのコインの価値を、普通のお金に直す」ことだと考えることができます。

逆に、十進数をN進数に直す問題は、「普通のお金を、金貨・銀貨・銅貨などのコインの価値に直す」ことだと考えられます。

この問題では、0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, …のように、三進数の数が並んでいます。

これらの数を、コイン、および普通のお金で表すと、次のようになります。

- 0→コインがない= 0 円
- 1→銅貨が 1 枚= 1 円,
- 2→銅貨が 2 枚= 2 円
- 10→銀貨が 1 枚と銅貨が 0 枚= 3 円が 1 枚と 1 円が 0 枚=3×1+1×0= 3 円
- 11→銀貨が 1 枚と銅貨が 1 枚= 3 円が 1 枚と 1 円が 1 枚=3×1+1×1= 4 円
- 12→銀貨が 1 枚と銅貨が 2 枚= 3 円が 1 枚と 1 円が 2 枚=3×1+1×2= 5 円
- 20→銀貨が 2 枚と銅貨が 0 枚= 3 円が 2 枚と 1 円が 0 枚=3×2+1×0= 6 円
- 21→銀貨が 2 枚と銅貨が 1 枚= 3 円が 2 枚と 1 円が 1 枚=3×2+1×1= 7 円

0 円,1 円,2 円,3 円,……と,0 円から始まって,1 円ずつお金が増えている数列であることがわかります。

(次のページへ)

では、(1)の問題である「222」はどうでしょう。

これは、「金貨が2枚,銀貨が2枚,銅貨が2枚」であると考えられます。

金貨,銀貨,銅貨は 1 枚あたり、それぞれ 9 円、3 円、1 円の価値があるのですから、「222」は、 $9\times2+3\times2+1\times2=26$ (円)になります。

では,26円は,0円,1円,2円,3円,……という数列の,何番目にあるでしょうか。

たとえば 2 円は、2 番目ではなく 3 番目にあります。なぜ 2 番目ではないかというと、0 円から始まっているからです。同じようにして、たとえば 3 円は 4 番目、4 円は 5 番目というようになっていますから、26 円は、26 番目ではなく、26+1=27 (番目)にあります。

1 (2)

ワンポイント 50番目の数は、十進数の 50 ではありません。

(1)で,26 円は,26 番目ではなく27 番目であることがわかりました。同じように考えると,50 番目の数は,(50 円ではなく)49 円です。

では、49円という金額を、三進数に直しましょう。

(1)で理解したように、十進数を、三進数のようなN進数に直すときは、「金貨・銀貨・銀貨などのコインの価値に直す」ことでしたね。

何進数であっても, 銅貨は 1 枚 1 円です。

銀貨 1 枚は,銅貨 3 枚ぶんの価値があるので 3 円です。

金貨 1 枚は、銀貨 3 枚ぶんの価値があるので 3×3=9 (円)です。

この問題は、金貨よりももっと価値の高いコインが必要です。プラチナ貨とします。

プラチナ貨 1 枚は、金貨 3 枚ぶんの価値があるので 9×3=27 (円)です。

49÷27=1 あまり 22 ですから, プラチナ貨は 1 枚必要で, あと 22 円あまっています。

22:9=2 あまり 4 ですから、金貨は 2 枚必要で、あと 4 円あまっています。

4÷3=1 あまり 1 ですから, 銀貨は 1 枚必要で, あと 1 円あまっているのは, 銅貨 1 枚です。

よって, プラチナ貨 1 枚, 金貨 2 枚, 銀貨 1 枚, 銅貨 1 枚になるので, 「1211」と表すことができます。

2 (1)

ワンポイント 1 回目の鐘の存在を忘れやすいので、注意しましょう。

A寺もB寺も、108 回ずつ鐘をつくので、答えは $108 \times 2 = 216$ (回)になるように思えますが、実際は同時についた鐘は 2 回とはカウントせず 1 回となるので、答えは 216 回よりも、同時についたぶんだけ少なくなります。

Aは 30 秒ごと、Bは 40 秒ごとに鐘をつくので、同時に鐘をつくのは、30 と 40 の最小公倍数である、120 秒ごとになります。

ところで, A寺の鐘は, 0 秒, 30 秒, 60 秒, ……というように, 同じ秒数だけ増える等差数列になっています。

等差数列のN番目を求める公式は、 右のようになります。 N番目の数=はじめの数+増える数 \times (N-1)

よって、A寺の 108 回目の鐘は、0+30×(108-1)=3210 (秒後)につくことになります。 (注意 30×108=3240 ではないことに注意しましょう。)

B寺の 108 回目の鐘は、A寺と同様にして、 $0+40\times(108-1)=4280$ (秋後)になりますが、A寺は 3210 秋後にすでに鐘をつき終わっているので、それ以降は同時になることはありえません。 よって、3210 秋間に、同時に鐘をつくのは何回あるかを求めればOKです。

同時に鐘をつくのは、0 秒、120 秒、240 秒、 \cdots というように、同じ秒数だけ増える等差数列になっています。

よって、3210 秒後までには、 $0+120\times(N-1)=3210$ として、逆算をすることになります。 3210-0=3210 3210÷120=26.75 26.75+1=27.75

したがって、A寺とB寺が同時に鐘をつくのは 27 回あるので、鐘が聞こえるのは、216 – 27 = 189 (回)になります。

2 (2)

ワンポイント (1)と同様に,1 回目の鐘の存在を忘れやすいので,注意しましょう。

○ 時ちょうどに、1 回目の鐘が聞こえます。残り、50-1=49 (回)です。

1 セットは, (30 と 40 の最小公倍数である) 120秒です。 120 秒間に, A寺とB寺の鐘が, どのように聞こえるかを整理 したのが, 右の図です。 A寺…30, 60, 90, 120 B寺… 40, 80, 120

A寺は 4 回, B寺は 3 回聞こえますが, 120 秒のときの鐘は同時に聞こえるので, 4+3-1=6 (回)聞こえます。

49÷6=8 あまり 1 ですから, 8 セットと, あと 1 回あまっています。

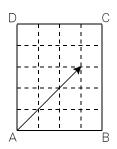
1 セットは 120 秒で, それが 8 セットと, あまりの 1 回はA寺の 1 回目である 30 秒後の鐘ですから, 120×8+30=990 (秒)になります。

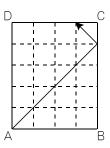
990÷60=16 あまり 30 ですから,50回目の鐘は,0 時 16 分 30 秒に聞こえます。

3 (1)

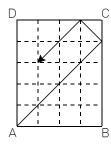
ワンポイントたての動きと横の動きに分けて考えてみましょう。

右の図の場合は,たてに 3 目もり,横に 3 目もり進んでいます。 まだ,AB,BC,CD,DAのどの辺にも到達していません。





右の図の場合は、たてに 5+2=7 目もり、横に 4+3=7 目もり進んでいます。 辺BCと辺DCで反射しました。



このように、たてと横に進んだ目もりの数は、必ず等しくなります。

そして、たてに 5 の倍数の目もりだけ進んだときに、辺DCか辺ABに届き、横に 4 の倍数の目もりだけ進んだときに、辺ADか辺BCに届きます。

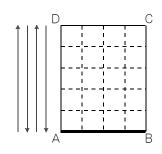
ですから、(5 と 4 の最小公倍数である) 20 目もりだけ進んだときに、ちょうど頂点に到達することになります。

20÷5=4 ですから、たてには 4 辺ぶん進んでいます。

たてに 1 辺ぶん進むと辺DCに, 2 辺ぶん進むと辺ABに,

- 3 辺ぶん進むと辺ABに、4 辺ぶん進むと辺ABに到達するので、
- いまは辺ABに到達したことになります。

つまり、光はいま、辺ABのどこかにいます。



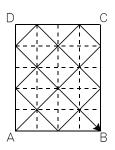
(次のページへ)

また、20÷4=5 ですから、横には 5 辺ぶん進んでいます。 横に 1 辺ぶん進むと辺BCに、2 辺ぶん進むと辺ADに、 3 辺ぶん進むと辺BCに、4 辺ぶん進むと辺ADに、5 辺ぶん進 と辺BCに到達するので、いまは辺BCに到達したことになります。 つまり、光はいま、辺BCのどこかにいます。

D C

光はいま,辺ABのどこかにいて,しかも辺BCのどこかにいる,ということは,光は点Bにいることになります。

よって、光は点Bに到達し、到達するまでに 20 個の正方形を横切ったことになります。



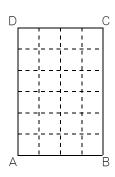
3 (2)

ワンポイント (1)と同様の解き方をします。

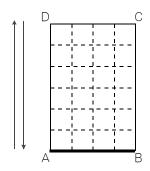
たてと横に進んだ目もりの数は、必ず等しくなります。

たてに 6 の倍数の目もりだけ進んだときに、辺DCか辺ABに届き、横に 4 の倍数の目もりだけ進んだときに、辺ADか辺BCに届きます。

ですから、(6 と 4 の最小公倍数である) 12 目もりだけ進んだときに、 ちょうど頂点に到達することになります。

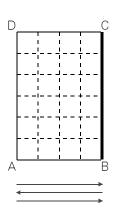


12÷6=2 ですから、たてには 2 辺ぶん進んでいます。 たてに 1 辺ぶん進むと辺DCに、2 辺ぶん進むと辺ABに到達 するので、いまは辺ABに到達したことになります。 つまり、光はいま、辺ABのどこかにいます。



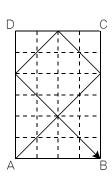
また、12÷4=3 ですから、横には 3 辺ぶん進んでいます。 横に 1 辺ぶん進むと辺BCに、2 辺ぶん進むと辺ADに、 3 辺ぶん進むと辺BCに到達するので、いまは辺BCに到達したことに なります。

つまり, 光はいま, 辺BCのどこかにいます。



光はいま、辺ABのどこかにいて、しかも辺BCのどこかにいる、ということは、光は点Bにいることになります。

よって、光は点Bに到達し、到達するまでに 12 個の正方形を横切ったことになります。



3 (3)

ワンポイント (1)と同様の解き方をします。

たてと横に進んだ目もりの数は、必ず等しくなります。

たてに 40 の倍数の目もりだけ進んだときに、辺DCか辺ABに届き、横に 25 の倍数の目もりだけ進んだときに、辺ADか辺BCに届きます。 -25 -25 -25

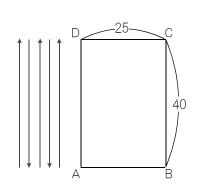
ですから、(40 と 25 の最小公倍数である) 200 目もりだけ 進んだときに、ちょうど頂点に到達することになります。

200÷40=5 ですから、たてには 5 辺ぶん進んでいます。 たてに 1 辺ぶん進むと辺DCに、2 辺ぶん進むと辺ABに、 3 辺ぶん進むと辺DCに、4 辺ぶん進むと辺ABに、5 辺ぶん 進むと辺DCに到達するので、いまは辺DCに到達したことにな ります。

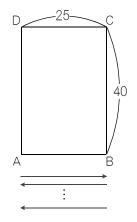
つまり、光はいま、辺DCのどこかにいます。

また,200÷25=8 ですから,横には 8 辺ぶん進んでいます。 たてと同じように,1 辺ぶん,2 辺ぶん,…とやっていっても構いませんが,奇数辺ぶん進むと辺BCに,偶数辺ぶん進むと辺ADに到達するので,8 辺ぶんの場合は偶数なので辺ADに到達したことになります。

つまり、光はいま、辺ADのどこかにいます。



40



光はいま,辺DCのどこかにいて,しかも辺ADのどこかにいる,ということは,光は点Dにいることになります。

よって、光は点Dに到達し、到達するまでに 200 個の正方形を横切ったことになります。