シリーズ・６年上・第１５回

基本問題・練習問題のくわしい解説

※高さを「平均」にする考え方をマスターしましょう。
※平行な面どうしでは，切り口の線も平行になります。
※点・辺・面の数を求める場合，切断前の立体に注目。
※頂点＋面－辺＝２　　（オイラーの多面体定理）
※スライスの図の書き方をマスターしましょう。
※２回切断する問題では，「禁断の線」を書きましょう。

目　次

基本	1	(1)…p.1	練習	1	(1)…p.12
基本	1	(2)…p.1	練習	1	(2)…p.13
基本	1	(3)…p.1	練習	2	(1)…p.15
基本	1	(4)…p.2	練習	2	(2)…p.16
基本	1	(5)…p.2	練習	3	(1)…p.17
基本	1	(6)…p.3	練習	3	(2)…p.18
基本	1	(7)…p.4	練習	4	(1)…p.19
基本	2	(1)…p.6	練習	4	(2)…p.20
基本	2	(2)…p.7	練習	4	(3)…p.21
基本	3	(1)…p.8	練習	5	(1)…p.22
基本	3	(2)…p.9	練習	5	(2)…p.22
基本	4	(1)…p.10	練習	5	(3)…p.23
基本	4	(2)…p.11	練習	6	(1)…p.24
			練習	6	(2)…p.28

すぐる学習会

基本 1 (1)

ワンポイント　「平均」の高さを考えます。

立体の左側の高さは４cmで，右側の高さは８cmです。

そこで，この立体の高さを，４と８の平均の，（４＋８）÷２＝６（cm）にします。

底面は半径５cmの円ですから，この立体の体積は，

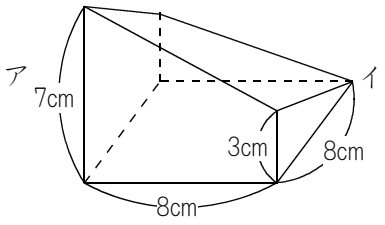
５×５×３.１４×６　＝　１５０×３.１４　＝　４７１（cm^3）になります。

基本 1 (2)

ワンポイント　「平均」の高さを考えます。

立体のアの方の高さは７cmで，イの方の高さは０cmです。

そこで，この立体の高さを，７と０の平均の，（７＋０）÷２＝３.５（cm）にします。



底面は１辺が８cmの正方形ですから，この立体の体積は，

８×８×３.５　＝　２２４（cm^3）になります。

基本 1 (3)

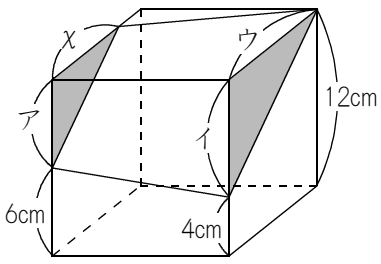
ワンポイント　平行な面を切ったときは，切り口の線も平行です。

平行な面を切ったときは，切り口の線も平行ですから，右の図のかげをつけた２つの三角形は，相似になります。

アは，１２－６＝６（cm）で，イは，１２－４＝８（cm）です。ア：イは，６：８＝３：４　です。

したがって，χ：ウも３：４　になりますが，ウは立方体の１辺ですから１２cmなので，χは，

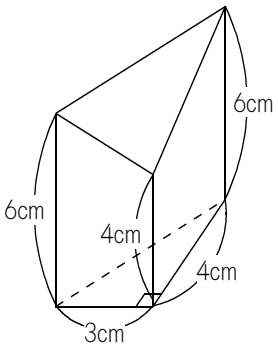
１２÷４×３＝９（cm）になります。



基本 1 (4)

ワンポイント　「平均」の高さを考えます。

展開図を組み立てると，右のような立体になります。



高さは，６cm，４cm，６cmになっていますが，この立体のような，三角柱を切断した立体の体積は，「底面積×高さの平均」で求めることができます。

高さの平均は，（６＋４＋６）÷３＝$\frac{16}{3}$（cm）です。

この立体の底面は，底辺が３cmで高さが４cmの三角形です。

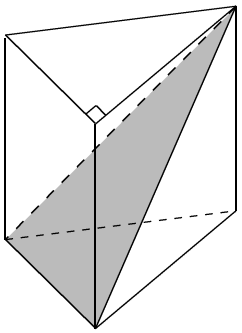
よって，この立体の体積は，３×４÷２ × $\frac{16}{3}$ ＝３２（cm^3）になります。

基本 1 (5)

ワンポイント　「平均」の高さを考えます。

この問題では，５cmや１０cmの長さを，まったく使わなくても，解くことができます。

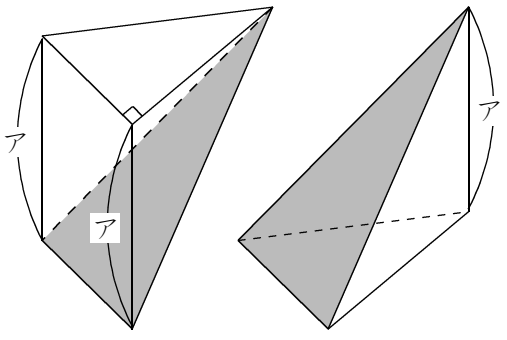
右の図の立体を，切断面で上側と下側に分けると，



右の図のようになります。

この２つの立体のような，三角柱を切断した立体の体積は，「底面積×高さの平均」で求めることができます。

ところが２つの立体の底面積は同じなので，２つの立体の体積の比は，「高さの平均」の比だけでＯＫです。



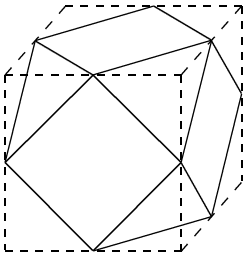
上側の立体の高さの平均は，（ア＋ア＋０）÷３，下側の立体の高さの平均は，（０＋０＋ア）÷３です。

どちらも３でわることをしなくても比は変わらないので，上側はアが２本分，下側はアが１本分であると考え，体積の比は２：１になります。

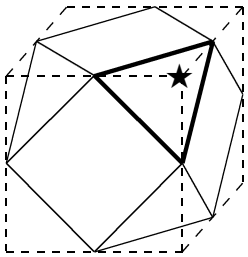
基本 1 (6)

ワンポイント　立方体だったときと，今の立体とをくらべて考えます。

立方体だったときの辺は，右の図の点線のようになってしまったので，すべてなくなっています。



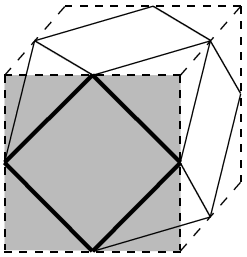
立方体の８個の頂点を切り落として立体を作りましたが，右の図の★の頂点を切り落としたときに，太線のように，辺が３本できました。



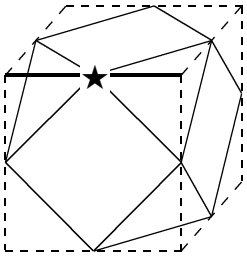
どの頂点を切ったときにも，新しく３本ずつできていくので，８個の頂点を切り落とすと，３×８＝２４（本）の辺ができました。

立方体だったときの辺はなくなり，新しく２４本の辺ができたので，いまの立体には辺が２４本あります。

別解　立方体だったどの面にも，新しく４本ずつ辺ができています。
　立方体には面が６面ありました。その，どの面にも，新しく４本ずつ辺ができているので，辺の本数は　４×６＝２４（本）になります。



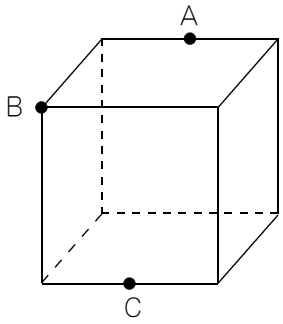
頂点の個数は，次のように考えます。
立方体の頂点はすべてなくなり，いまの立体の頂点は，立方体だったときの辺の真ん中にあります。
立方体には辺が１２本あり，そのすべての辺のまん中にいま頂点があるので，立方体の辺の本数と，いまある頂点の個数は同じです。
よって，頂点の数は１２個になります。



基本 1 (7)

ワンポイント　「スライス」の図の書き方をマスターしましょう。

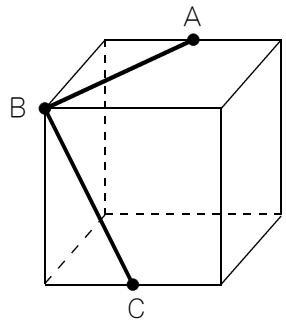
まず，ＡからＢ，ＢからＣ，ＣからＡに，切り口の線を引くことができるかどうかを考えます。



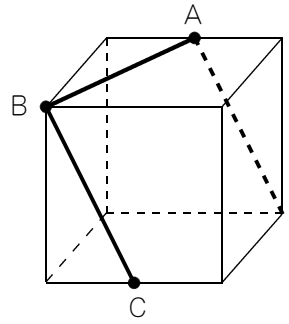
ＡからＢは，上の面を通るので引いてＯＫです。

ＢからＣは，前の面を通るので引いてＯＫです。

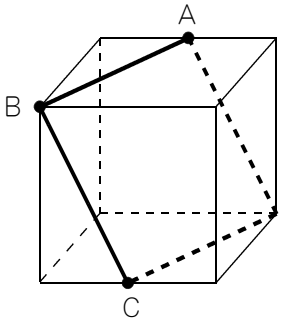
ＣからＡは，立方体の中を通るので，引いてはいけません。



次に，「平行な面の場合は，切り口の線も平行」という知識を使います。
立方体の前の面に引いてある線と平行になるように，後ろの面にもＡから線を引きます。

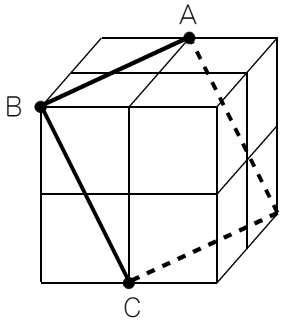


下の面にも切り口の線を引いて，切り口の線のでき上がりです。

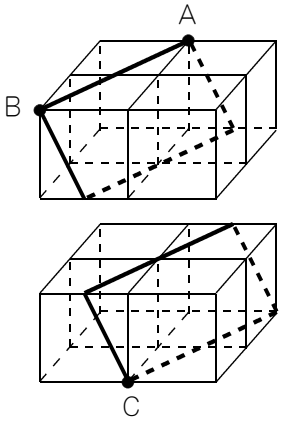


（次のページへ）

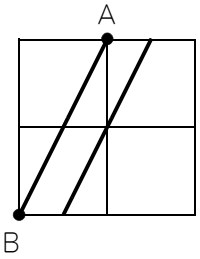
右の図のように，切り口の線ができたことになります。

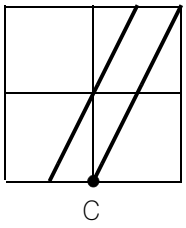


上の段と下の段とにスライスすると，右の図のようになります。

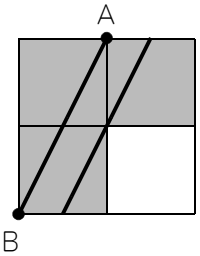


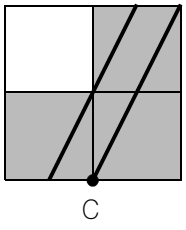
上から見た図は，右のようになります。
切り口の線は，上の面と下の面の２本を書くようにします。





右の図の，かげをつけた小立方体が，切られる小立方体です。
上の段に３個，下の段に３個ありますから，全部で6個あります。

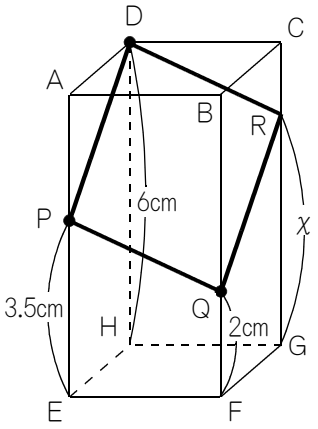




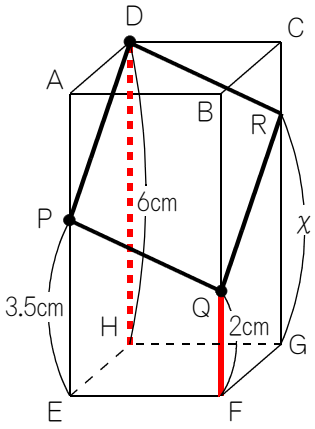
基本 2 (1)

ワンポイント　大変簡単に求める方法があります。

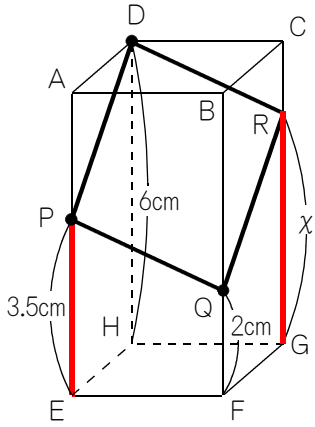
右の図の，χの長さを求める問題です。



右の図の，ＨＤとＦＱの長さの和は，
６＋２＝８（cm）です。

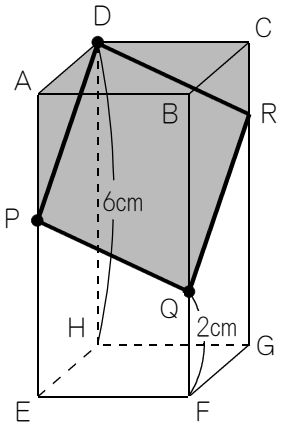


ＥＰとＧＲ（＝χ）の長さも和も，やはり８cmになります。
ＥＰは３.５cmですから，ＧＲは，８－３.５＝4.5（cm）になります。

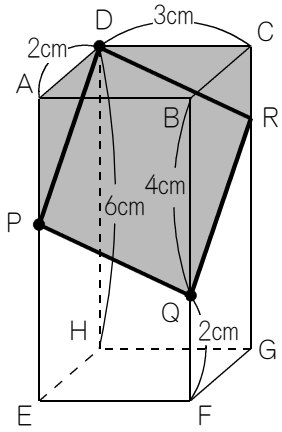


基本 2 (2)

ワンポイント　高さを「平均」にする解き方がベストです。



頂点Ａをふくむ立体は，右の図のかげをつけた部分の立体です。



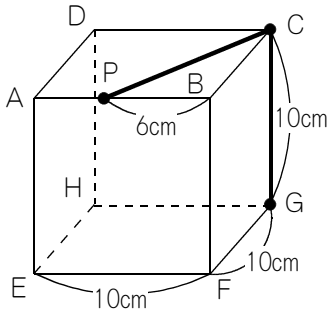
ＢからＱまでの高さは　６－２＝４（cm）で，Ｄのところの高さは０cmですから，かげをつけた立体の高さを，４cmと０cmの平均である，（４＋０）÷２＝２（cm）にします。

底面積は，２×３＝６（cm^2）ですから，かげをつけた立体の体積は，６×２＝１２（cm^3）になります。

基本 3 (1)

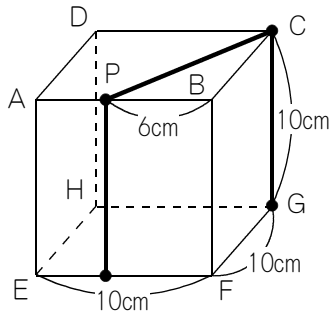
ワンポイント　切り口の線をしっかり書いてから，体積を求めましょう。

立方体の１辺は１０cmで，ＢからＰまでの長さは６cmです。
Ｐ，Ｃ，Ｇを通る切り口の線を，引いていきます。
ＰからＣまでは，上の面を通るので切り口の線を引いてＯＫです。
ＣからＧまでも，すでに辺があるので，切り口の線を引いてＯＫです。
しかし，ＧからＰまでは，立方体の中を通るので，切り口の線を引いてはいけません。

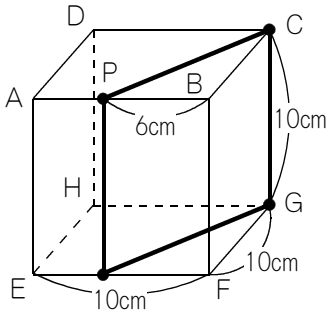


ここで，「平行な面では，切り口の線も平行」という知識を使います。

ＣＧに平行になるように，Ｐから真下に切り口の線を引きます。



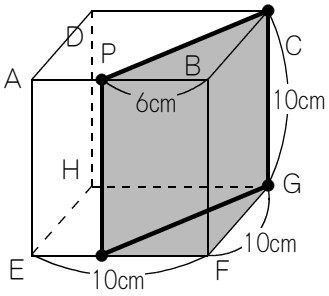
そして右の図のようにすれば，切り口の線を引き終わります。



Ｂをふくむ立体の体積を求める問題ですから，右の図のかげをつけた立体の体積を求めることになります。

底面は三角形ＰＢＣですから，６×１０÷２＝３０（cm^2）で，高さは１０cmです。

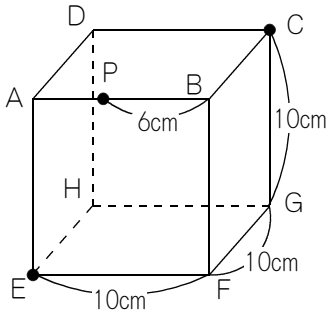
かげをつけた部分の体積は，３０×１０＝３００（cm^3）になります。



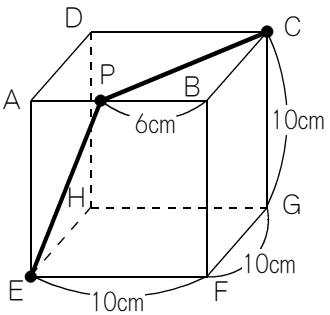
基本 3 (2)

ワンポイント　(1)と(2)の切り口の線を両方書いて，一番小さな立体を探します。

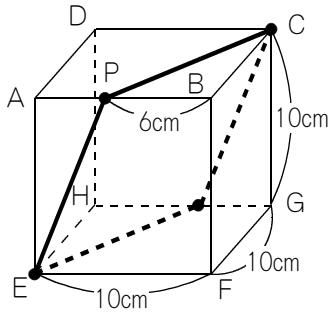
(2)では，(1)の後に，Ｐ，Ｃ，Ｅを通る平面で切り取ります。



ＰからＣまでは上の面を通るので，引いてＯＫです。
ＣからＥまでは，立方体の中を通るので，引いてはいけません。
ＥからＰまでは前の面を通るので，引いてＯＫです。

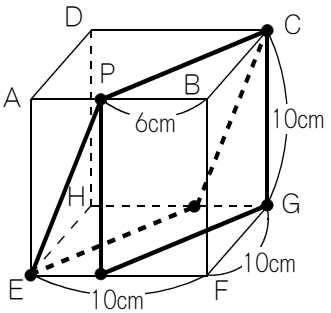


「平行な面は，切り口の線も平行になる」のですから，Ｐ，Ｃ，Ｅを通る平面で切ると，右の図のようになります。

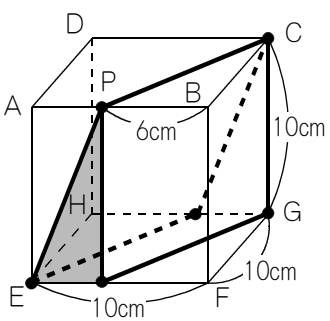


(1)で求めた，Ｐ，Ｃ，Ｇを通る切り口の線も書くと，右の図のようになります。

３つに切り分けられた立体のうち，一番小さな立体は，切り口の面にはさまれた立体です。



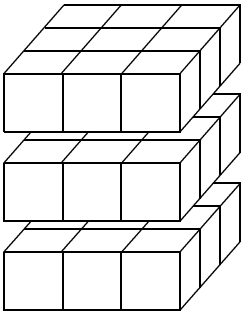
その立体の底面は，右の図のかげをつけた部分ですから，底辺が １０－６＝４（cm），高さが１０cmの三角形です。
その三角形の面積は，４×１０÷２＝２０（cm^2）です。
立体の高さは，ＦＧにあたりますから１０cmです。
よって，立体の体積は，２０×１０＝２００（cm^3）です。



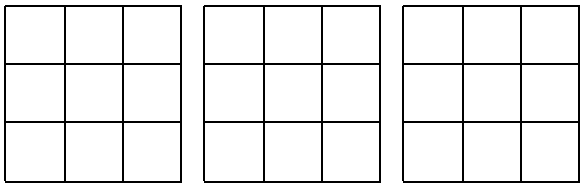
基本 4 (1)

ワンポイント　「スライス」の考え方を，マスターしましょう。

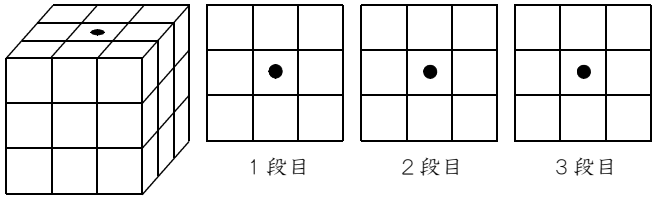
立方体を，右の図のように３段に分け，

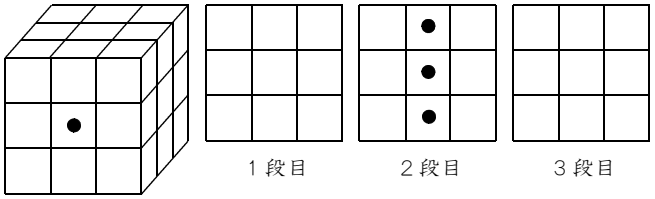


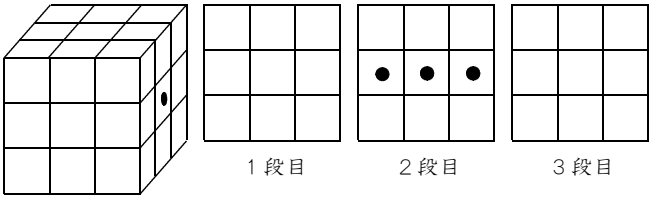
上から見た図に，●印を書いていきます。



右の図のように書きこむことができます。



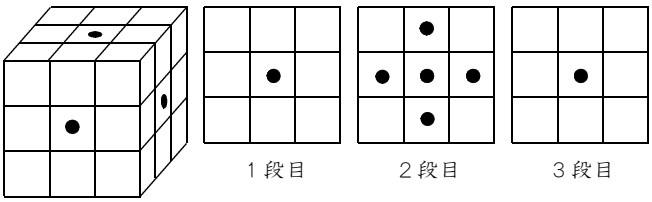




まとめると，右の図のようになり，●印は，１段目から３段目までに７個あります。

２７個の立方体のうち，穴があいたのが７個ですから，あいていないのは

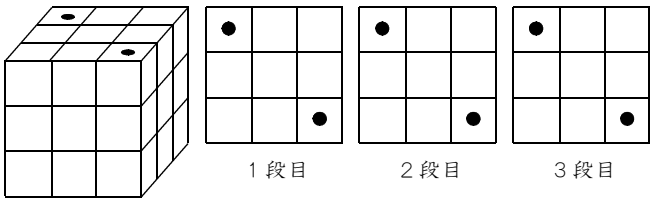
２７－７＝２０（個）になります。

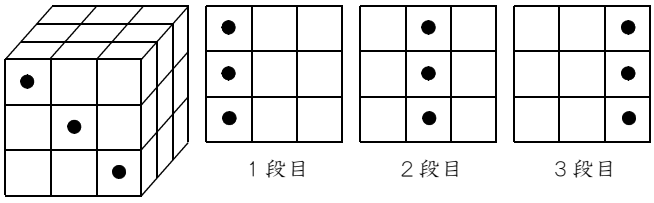


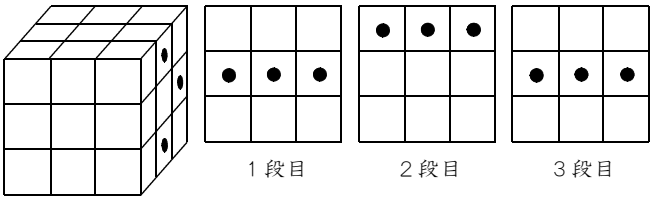
基本 4 (2)

ワンポイント　「スライス」の考え方を，マスターしましょう。

(1)と同じように，スライスした図に●印をつけていきます。



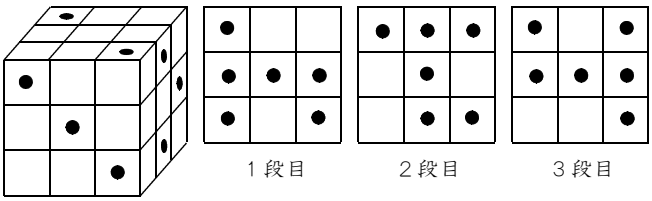




まとめると，右の図のようになります。

穴のあいていない小立方体は，スライスの図では，●印が書いていない正方形です。

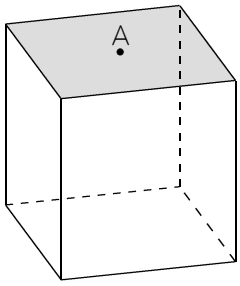
各段に３個ずつありますから，全部で，３×３＝９（個）になります。



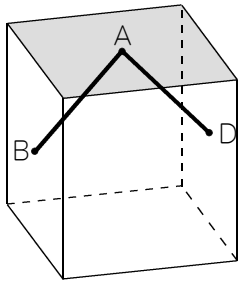
練習 1 (1)

ワンポイント　ＡからＦの点がどの面にあるかがまぎらわしいので，注意しましょう。

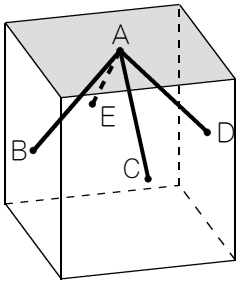
右の図の，かげをつけた面が，上の面です。
その面の中心に，点Ａがあります。



Ａから，左の面の中心にある点Ｂと，右の面の中心にある点Ｄに，線を引いたのが，右の図です。

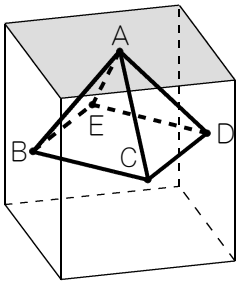


同じように，Ａから，前の面の中心の点Ｃと，後ろの面の中心の点Ｅに，線を引きます。



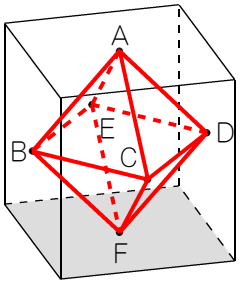
さらに，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅを線で結んだのが，右の図です。
太線の立体は，四角すいになっています。

※　この図は，(2)でも利用します。



さらに，立方体の下の面の中心Ｆからも，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅに線を引くと，右の図のような立体ができ上がります。

※　この立体は，正三角形８面でできているので，「正八面体」といいます。



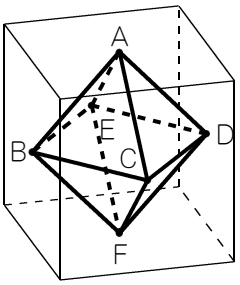
練習 1 (2)

ワンポイント　(1)で，答えを求めるために考えた途中の図が，利用できます。

この問題では，立方体の１辺の長さを何cmにしても答えが同じなので，１辺の長さを６cmにします。

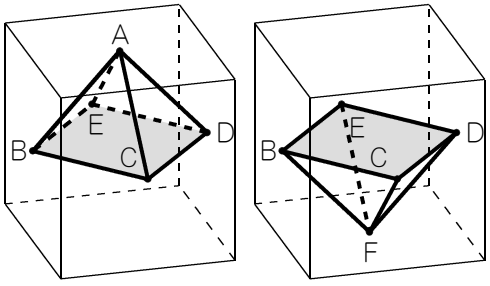
※　「６」という数は，２でも３でもわり切れるので，計算が楽になることが多いです。

(1)で，正八面体は，右の図のような立体であることがわかりました。

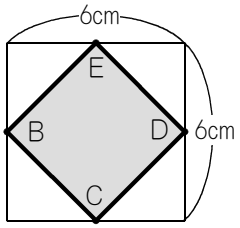


この立体を，上下２つに分けます。
上，下とも，まったく同じ形で同じ大きさの四角すいになります。

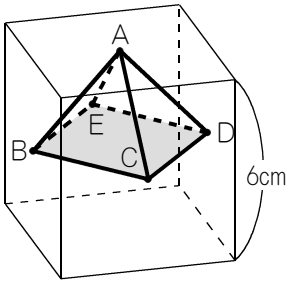
四角すいの底面は，かげをつけた四角形ＢＣＤＥになります。



上から見ると，底面は右の図のかげをつけた部分のようになっています。
かげの部分の面積は，四角形ＢＣＤＥをひし形とみなして，「対角線×対角線÷２」の公式で求めます。
対角線の長さは６cmですから，底面積は，
６×６÷２＝１８（cm^2）になります。

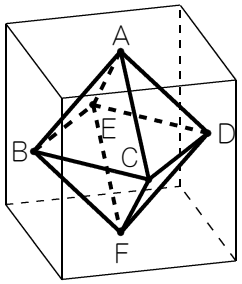


四角すいの高さは，６cmの半分なので，３cmです。
四角すいの体積は，「底面積×高さ÷３」で求められますから，
１８×３÷３＝１８（cm^3）になります。



（次のページへ）

正八面体の体積は，四角すいが２個ぶんですから，
１８×２＝３６（cm^3）です。



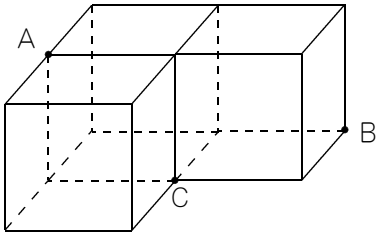
立方体の体積は，１辺が６cmですから，
６×６×６＝２１６（cm^3）です。

よって，正八面体の体積は，もとの立方体の体積の，$\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$ になります。

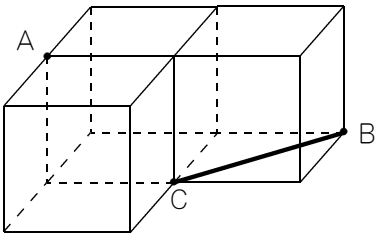
練習 2 (1)

ワンポイント　「平行な面では，切り口の線も平行」という知識を利用します。

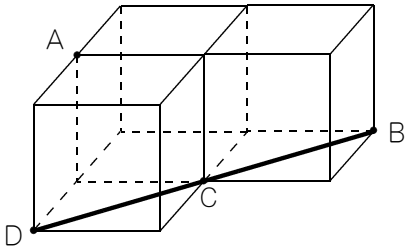
まずはじめに，Ａ，Ｂ，Ｃを通る切り口の線が引けるかどうかを考えていきます。



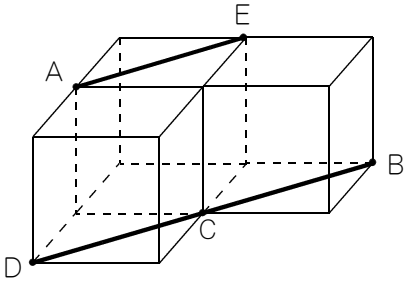
ＡからＢは，立体の中を通っているのでダメです。
ＢからＣは，立体の下の面を通っているのでＯＫです。
ＣからＡは，立体の中を通っているのでダメです。



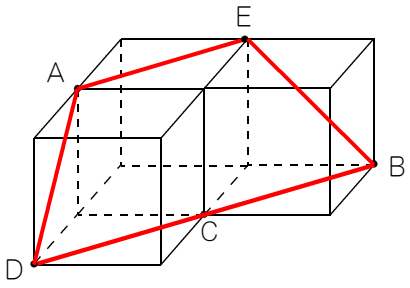
ＢからＣまでの線は，Ｃからそのまま延長することができます。
延長してできた点を，点Ｄとします。



「平行な面では，切り口の線も平行」ですから，直線ＢＤと平行になるように，上の面にも点Ａから直線を引きます。
直線を引いてできた点を，点Ｅとします。



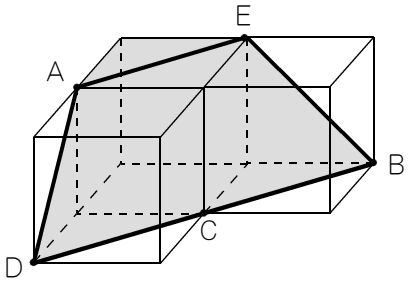
ＡとＤ，ＥとＢを線で結べば，切り口の線のでき上がりです。



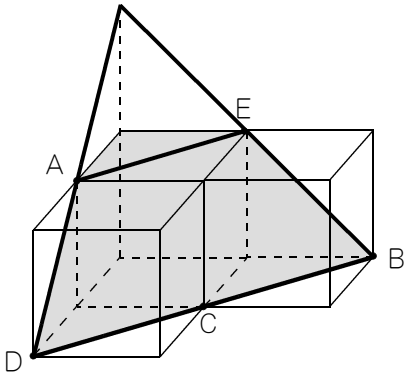
練習 2 (2)

ワンポイント　「三角すい台」の体積を求める問題です。

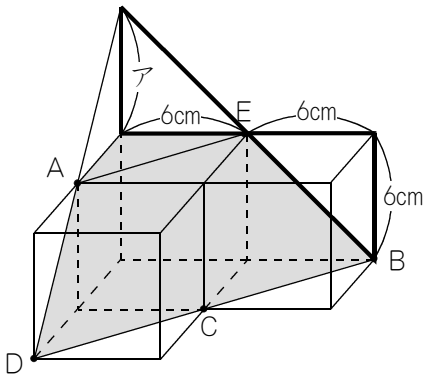
切り口より下側の部分の立体は，右の図のかげをつけた部分の立体です。



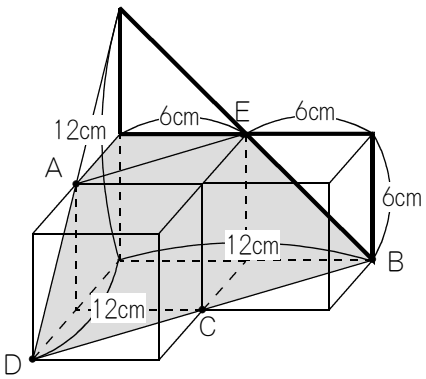
この立体は，大きな「三角すい」から，上にある，小さな「三角すい」を引いた残りの立体で，「三角すい台」といいます。



立方体の１辺は６cmです。
右の図の太い三角形は形も大きさも同じですから，アの長さも６cmです。



よって，大きい三角すいの高さは，６＋６＝１２（cm）になります。
大きい三角すいの体積は，
１２×１２÷２ × １２ ÷３ ＝ ２８８（cm^3）です。
底面の三角形　　高さ「すい」だから



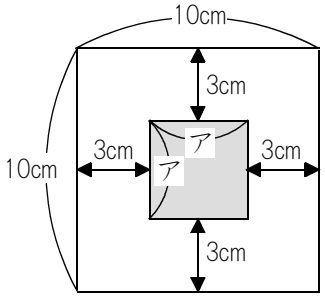
小さい三角すいの体積は，
６×６÷２ ×６ ÷３ ＝ ３６（cm^3）です。

よって，切り口より下の立体の体積は，
２８８－３６＝２５２（cm^3）になります。

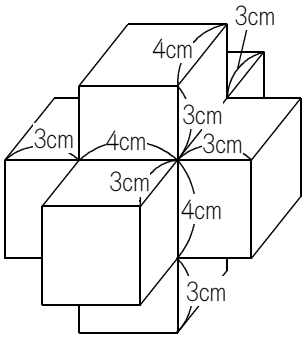
練習 3 (1)

ワンポイント　見取り図を書くのが上手な人が，有利な問題です。

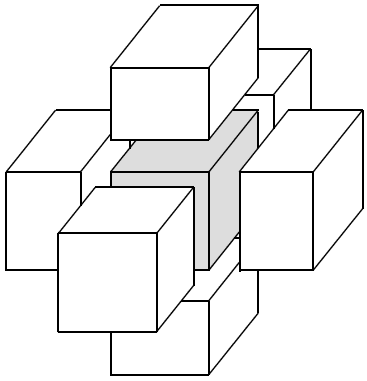
右の図の，アの長さは　１０－３×２＝４（cm）です。



よって，立方体からくりぬいた部分は，右の図のようになります。



立方体からくりぬいた部分を右の図のように分けると，まん中にあるかげをつけた部分は，１辺が４cmの立方体なので，体積は　４×４×４＝６４（cm^3）です。
それ以外の６つの直方体は，たて，横，高さが，４cm，４cm，３cmなので，体積は，４×４×３＝４８（cm^3）です。



よって，くりぬいた部分の体積は，
６４＋４８×６＝３５２（cm^3）になります。

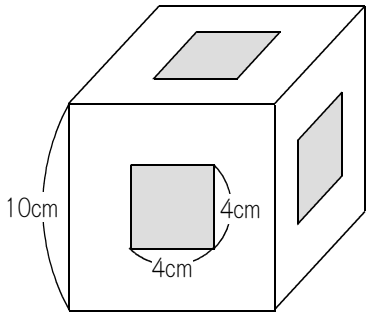
立方体全体は，１辺が１０cmですから，体積は　１０×１０×１０＝１０００（cm^3）です。

よって，くりぬいた残りの立体の体積は，１０００－３５２＝６４８（cm^3）になります。

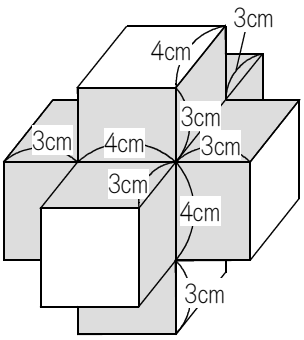
練習 3 (2)

ワンポイント　穴の中の表面積を求めることが，とてもむずかしい問題です。

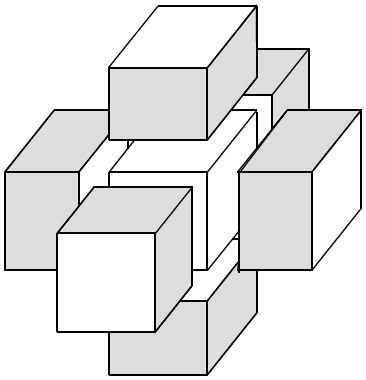
外側から見える面は，１つの面の面積が，１０×１０－４×４＝８４（cm²）で，全部で６面ありますから，８４×６＝５０４（cm²）です。



穴の中は，右の図のようになっています。
１辺が４cmの正方形の部分は，ただの穴なので，表面積には関係ありません。
図の，かげをつけた部分が，穴の中の面です。



右の図のように分けると，まん中にある１辺が４cmの立方体は，すべての面が他の直方体とくっついているので，表面積には関係ありません。
それ以外の６つの直方体の側面積が，表面積に関係する部分です。



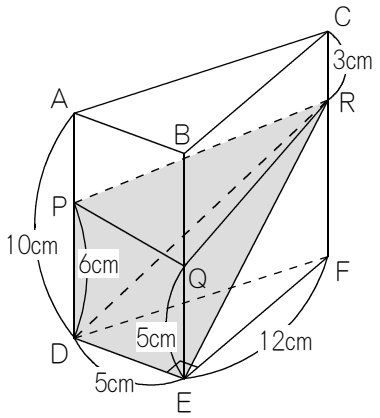
１つの直方体の側面積は，１つの面が，たて４cm，横３cmの長方形になっていて，それが４面あるので，４×３×４＝４８（cm²）です。
このような直方体が６個あるので，穴の中の表面積は，４８×６＝２８８（cm²）になります。

外側から見える表面積は５０４cm² で，穴の中の表面積は２８８cm² ですから，この立体の表面積は，５０４＋２８８＝７９２（cm²）になります。

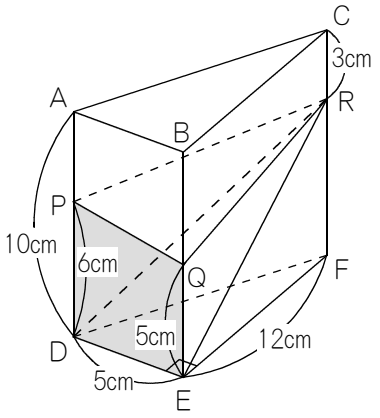
練習 4 (1)

ワンポイント　すい体の体積は，「底面積×高さ÷３」で求められます。

四角すいＲ－ＰＤＥＱは，右の図のかげをつけた立体です。

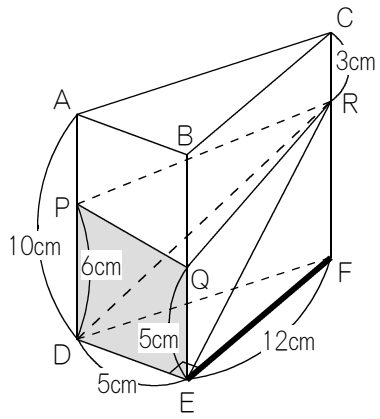


四角すいＲ－ＰＤＥＱの底面は，右の図のかげをつけた四角形ＰＤＥＱです。
四角形ＰＤＥＱは台形です。その面積は，
（６＋５）×５÷２＝２７.５（cm^2）です。



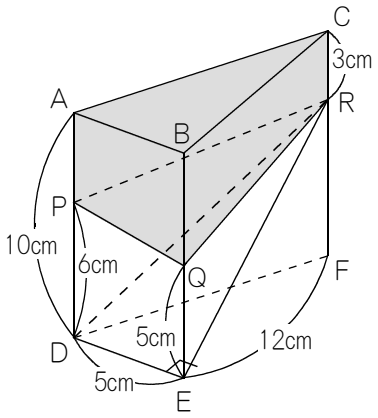
四角すいＲ－ＰＤＥＱの高さは，角ＤＥＦが直角であることから，右の図の太線ＥＦです。

四角すいＲ－ＰＤＥＱの底面積は２７.５cm^2で，高さは１２cmですから，体積は，
２７.５×１２÷３＝１１０（cm^3）になります。



練習 4 (2)

ワンポイント　高さを「平均」にする解き方がベストです。



頂点Ａをふくむ立体は，右の図のかげをつけた部分の立体です。

　ＡＰは　１０－６＝４（cm），ＢＱは　１０－５＝５（cm），ＣＲは３cmですから，高さの平均は，

（４＋５＋３）÷３＝４（cm）です。

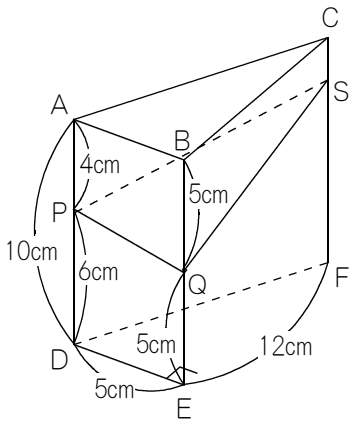
　底面は三角形ＡＢＣで，その面積は，

５×１２÷２＝３０（cm^2）です。高さの平均は４cmですから，体積は，３０×４＝１２０（cm^3）になります。

練習 4 (3)

ワンポイント　平均の考え方をうまく利用すれば，簡単に答えが求められます。

右の図において，三角柱全体を，体積が１：２になるように上下に分けたときの，ＣＳの長さを求める問題です。
上の立体を㊤，下の立体を㊦と名付けることにします。



㊤の体積は，「底面積×㊤の高さの平均」，㊦の体積も，「底面積×㊦の高さの平均」で求めることができ，それが１：２になるのですが，底面積はどちらも同じです。

よって，「㊤の高さの平均」と，「㊦の高さの平均」が，１：２になるだけでＯＫです。

ところで，「高さの平均」を求めるときには，「高さの合計」を３でわって求めます。

ですから，３でわる前の，「㊤の高さの合計」と，「㊦の高さの合計」も，１：２になります。

「㊤の高さの合計」と「㊦の高さの合計」との和は，三角柱全体の高さの合計ですから，１０×３＝３０（cm）です。

したがって，「㊤の高さの合計」は，３０÷（１＋２）×１＝１０（cm）です。

ＡＰは４cm，ＢＱは５cmですから，ＣＳは，１０－（４＋５）＝1（cm）になります。

別解　実際に体積を求める解き方では，次のようになります。

全体の体積は，５×１２÷２（底面積）×１０（高さ）＝３００（cm^3）です。

㊤の立体の体積は，３００÷（１＋２）×１＝１００（cm^3）です。

底面積は ５×１２÷２＝３０（cm^2）ですから，

３０（底面積）×（４＋５＋ＣＳ）÷３（高さの平均）＝１００　となり，あとは逆算です。

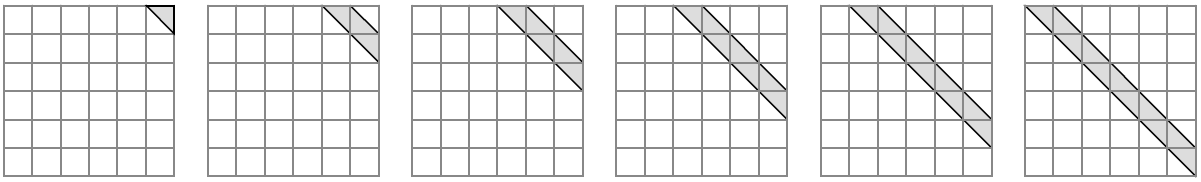
１００×３＝３００　　３００÷３０＝１０　　１０－（４＋５）＝１

よって，ＣＳの長さは1cmになります。

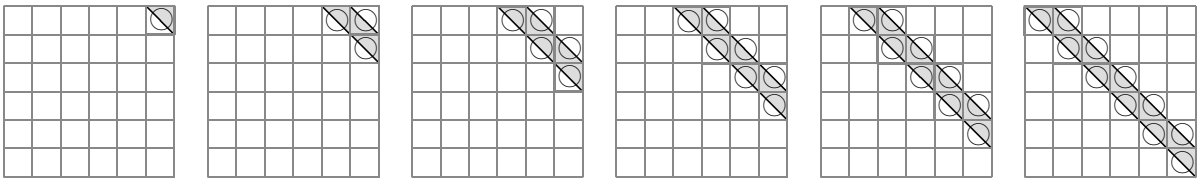
練習 5 (1)

ワンポイント　スライスした図をしっかり書きましょう。

立方体をスライスして６段にして，切断した面を，かげをつけて表すと，下の図のようになります。



切断面によって切られた小立方体は，下の図の○の立方体です。
全部で，１＋３＋５＋７＋９＋１１＝３６（個）になります。

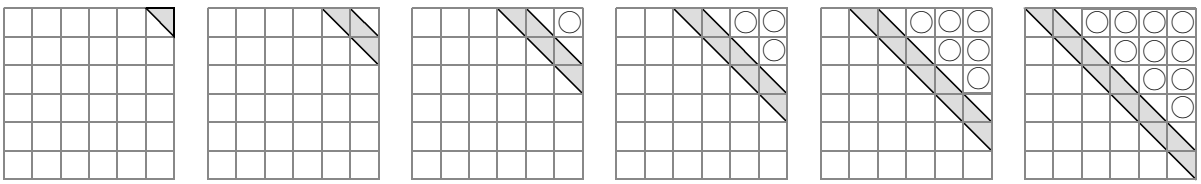


練習 5 (2)

ワンポイント　三角すいＡ－ＢＣＤの方だけを数えることに注意しましょう。

三角すいＡ－ＢＣＤの方の，切られていない小立方体は，スライスした図においてはかげをつけた切断面よりも右上にある，白い正方形の個数になります。

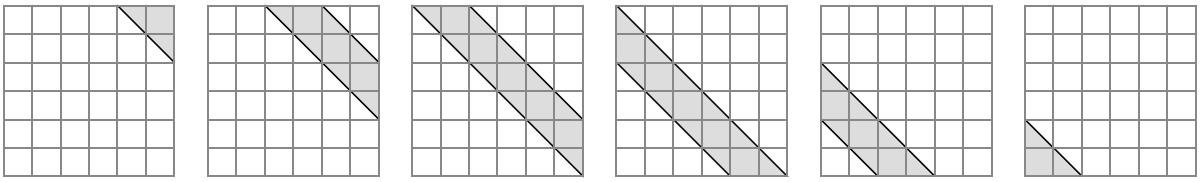
よって下の図のようになり，全部で　０＋０＋１＋３＋６＋１０＝２０（個）になります。



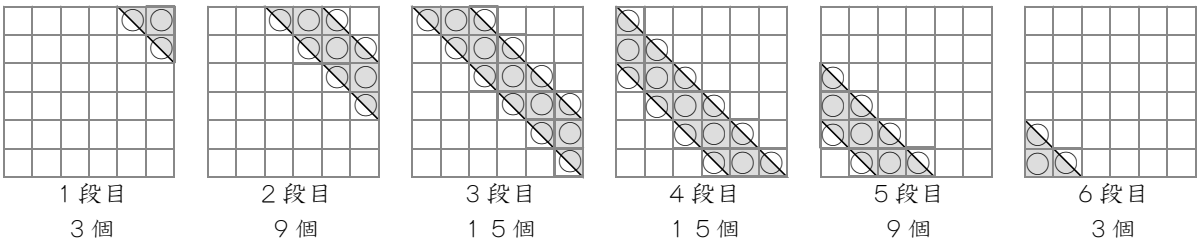
練習 5 (3)

ワンポイント　スライスした図をしっかり書きましょう。

立方体をスライスして６段にして，切断した面を，かげをつけて表すと，下の図のようになります。



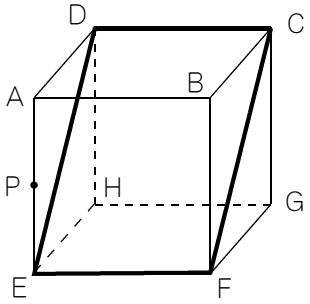
切断面によって切られた小立方体は，下の図の○の立方体です。
全部で，３＋９＋１５＋１５＋９＋３＝５４（個）になります。



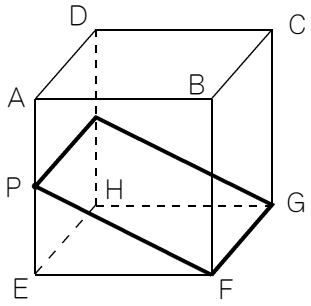
練習 6 (1)

ワンポイント　２つの面で切断したときの解き方をマスターしましょう。

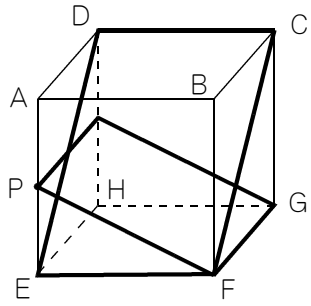
立方体を，Ｃ，Ｄ，Ｅを通る平面で切断したときの，切り口の線は，右の図の太線のようになります。



立方体を，Ｐ，Ｆ，Ｇを通る平面で切断したときの，切り口の線は，右の図の太線のようになります。



両方の切り口の線を重ねて書いたのが，右の図です。



この問題のように，立体を２回切断する問題の場合は，次のようにして作図していきます。

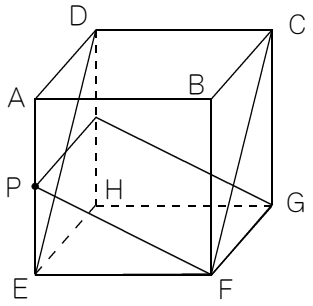
１．切断面と切断面の交わった点を，２個見つける。
２．その２個を，直線で結ぶ。(すぐるでは，この線のことを「禁断の線」と名付けています。)
３．「どこかの頂点をふくむ立体」という問題の場合は，その頂点から，切断されたところまで太線をひく。

では，この作図のしかたにしたがって，図を書いていきましょう。

（次のページへ）

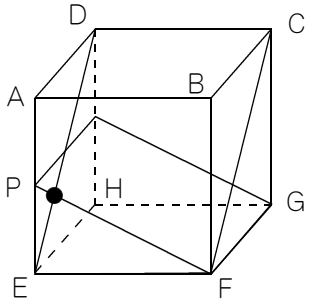
まず，切断面と切断面の交わった点を，２個見つけるのですが，ここで重大な注意事項があります。

ちがう面どうしでは，直線と直線は交わらない。



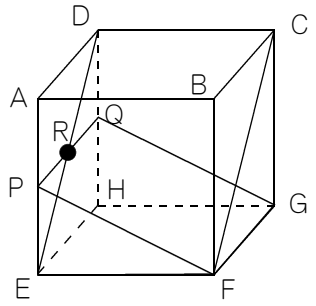
たとえば右の図の，●印の点は，切り口の線どうしが交わっているように見えますが，実際は交わっていません。

なぜなら，ＰＦの線は前の面である面ＡＥＦＢにあり，ＥＤの線は左の面である面ＡＥＨＤにあるので，ＰＦとＥＤはちがう面にあるので，交わるわけがないのです。

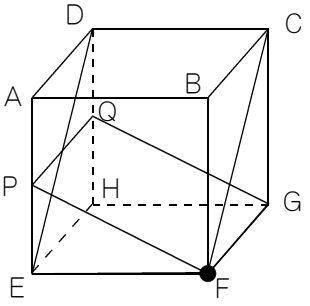


このように，見取り図では交わっているかのように見えても，実際には交わっていない点があるので，注意しましょう。

右の図の点Ｒは，ＰＱの線は左の面にあり，ＥＤの線も左の面にあるので，同じ面にある直線どうしが交わったのですからＯＫです。

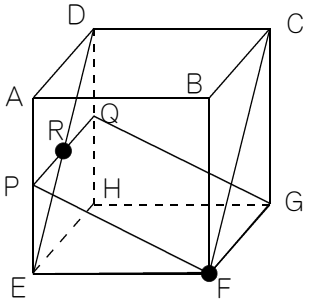


右の図の点Ｆも，２つの切断面の両方にふくまれる頂点ですから，２つの切断面が交わった点であるといえます。



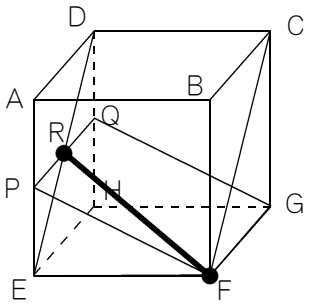
これで，切断面と切断面の交わった点を，２個見つけることができました。

点Ｒと点Ｆが，その２個です。



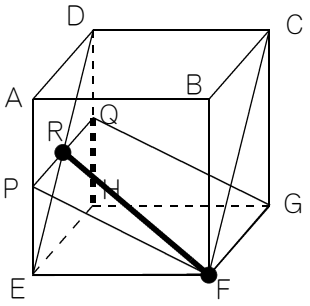
（次のページへ）

次にその２個を，直線で結びます。

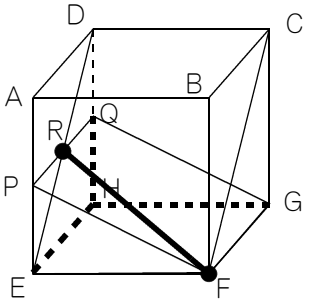


この問題は，点Ｈをふくむ立体についての問題ですから，点Ｈから，切断されているところまで，太線を書いていきます。

点Ｈから上に行くと，点Ｑで立体が切断されています。
よって，点Ｈから点Ｑまでを，太線にします。

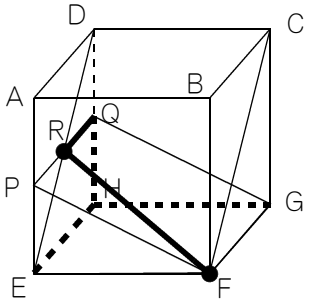


点Ｈから点Ｅまでは，何も切断されることなく，無事に生き残っていますから，点Ｈから点Ｅまでを，太線にします。
同じようにして，点Ｈから点Ｇまでも，太線になります。



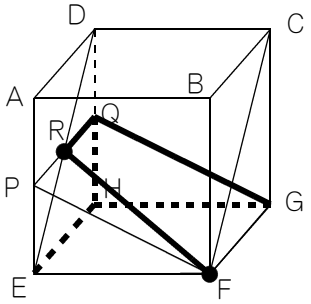
これで，点Ｈをふくむ立体の頂点として，点Ｑ，Ｅ，Ｇがあることがわかりました。

次に，点Ｑから太線を書いていきます。
点Ｑから点Ｐに向かって太線を書くとき，途中の点Ｒで，立体は切断されています。
よって，点Ｑから点Ｒまで，太線を書くことになります。

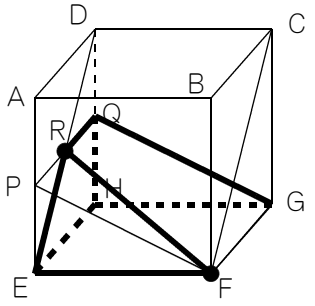


（次のページへ）

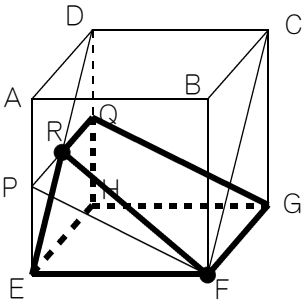
点Ｑから点Ｇまでは，切断されることなくそのまま
生き残っているので，太線を書いてＯＫです。



点Ｅから点Ｒまで，点Ｅから点Ｆまでにも，
太線を書くことができます。

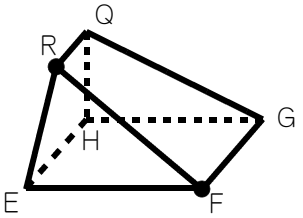


点Ｇからは，点Ｆまで太線を書きます。



太線部分だけを取り出すと，右の図のようになります。

頂点は６個，辺は９本，面の数は５個になります。



※オイラーの多面体定理というのを知っていますか？
穴のあいていない立体の場合，

頂点＋面－辺＝２

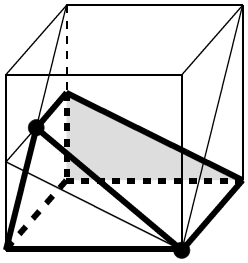
になる，という定理です。

この定理によって，答えが合っているかどうかを確認することができます。
頂点が６，面が５，辺が９ですから，６＋５－９＝２ となって，正しいことが確かめられました。

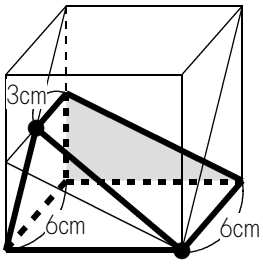
練習 6 (2)

ワンポイント　「平均」の考え方で，体積を求めることができます。

この立体の底面は，右の図のかげをつけた三角形になります。
底面積は，６×３÷２＝９（cm^2）です。



この立体の高さは，３cmと６cmと６cmの平均であると考えて，
（３＋６＋６）÷３＝５（cm）です。



よって，この立体の体積は，９×５＝４５（cm^3）になります。