演習問題集・５年下・第９回

反復基本問題・反復練習問題のくわしい解説

※　等差数列のＮ番目＝はじめ＋増える数×（Ｎ－1）
※　等差数列の和＝（はじめ ＋ おわり）× Ｎ ÷ 2
※　１から10までの和は55，1から13までの和は91
※　2，3，5，8，12，…のような階差数列は，5番目のようなサンプルを式にして考える。
※　段にして書くと，個数とか和とかを書き込みやすくなるので，ミスを防ぐことができる。

目　次

すぐる学習会

反復基本 $\boxed{1}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　７ずつ増えていく，等差数列です。

次の公式を利用します。

等差数列のＮ番目 ＝ はじめの数 ＋ 増える数 ×（Ｎ －１）

はじめの数は２で，増える数は７です。

この問題は，100番目の数を求める問題ではありません。
何番目の数が100になるかを求める問題です。

Ｎ番目の数が100であるとすると，２＋７×（Ｎ －１）＝ 100 となります。

たし算よりもかけ算が先ですから，２＋ $\boxed{７×（Ｎ －１）}$ ＝ 100 と，大きいワクでかこっておきます。

100 － 2 ＝ 98　　　98 ÷ 7 ＝ 14　　　14 ＋ 1 ＝ 15

よって，100は15番目の数になります。

※　答えを14番目にしたり，14 － 1 ＝ 13（番目）にするミスが多いです。注意しましょう。

反復基本 $\boxed{1}$ (2)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　4ずつ増えていく，等差数列です。

等差数列の和を求めるには，次の公式を利用します。

等差数列の和 ＝（はじめの数 ＋ おわりの数）× N ÷ 2

はじめの数は3で，個数は1番目から20番目までの20個です。
あとは，おわりの数さえわかれば，答えを求めることができます。

おわりの数というのは，20番目の数のことですから，次の公式を利用します。

等差数列のN番目 ＝ はじめの数 ＋ 増える数 ×（N － 1）

はじめの数は3で，増える数は4，おわりの数は20番目の数ですから，Nを20にして，

$3 + 4 \times (20 - 1) = 3 + 4 \times 19 = 3 + 76 = 79$

よって，おわりの数は79であることがわかりました。
あらためて，次の公式を使って，

等差数列の和 ＝（はじめの数 ＋ おわりの数）× N ÷ 2

1番目の数から20番目の数までの和 ＝ $(3 + 79) \times 20 \div 2 =$ 820 になります。

反復基本 $\boxed{1}$ (3)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　５番目のときなどのサンプルを書いて考えると，わかりやすくなります。

この数列は，右のように増えていっています。

1，　3，　6，　10，　15，　21，……
＋2　＋3　＋4　＋5　＋6

たとえば，５番目の数である15を求めるときに，どのような計算で求めるのかを考えてみます。

1，　3，　6，　10，　15，　21，……
＋2　＋3　＋4　＋5　＋6

１番目の数は１です。
この，１番目の数に，

1，　3，　6，　10，　15，　21，……
＋2　＋3　＋4　＋5　＋6

1，　3，　6，　10，　15，　21，……
＋2　＋3　＋4　＋5　＋6

２をたして３をたして４をたして５をたせば，５番目の数である15になります。
つまり，１番目の数である１に，２から５までの数をたせば，５番目の数になります。

式で書けば，５番目の数である15を求めるときには，１＋２＋３＋４＋５ とすることになります。

同じように考えれば，６番目の数である21を求めるときには，１＋２＋３＋４＋５＋６とすることになります。
つまり，１から６までの和を求めるわけです。

1，　3，　6，　10，　15，　21，……
＋2　＋3　＋4　＋5　＋6

この問題では，18番目の数を求めたいのですから，１から18までの和を求めることになります。

13番目の数

1，　3，　6，　10，　15，　21，……，
＋2　＋3　＋4　＋5　＋6　　＋18

式にすると，　１＋２＋３＋…＋18　となります。

１から18までの和は，(はじめの数 ＋ おわりの数)×Ｎ÷２＝(１＋18)×18÷２＝171 ですから，答えは171です。

反復基本 $\boxed{1}$ (4)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　段にして書きましょう。

前の数よりもいくら増えたか，あるいはいくら減ったかを書いてみると，右のように，「+2，+2，−2」，「+2，+2，−2」，……のくり返しになっています。

2，4，6，4，6，8，6，8，10，8，……

+2　+2　−2　+2　+2　−2　+2　+2　−2

ですから，右のように区切りを入れれば，規則がわかりやすくなります。

2，4，6，/ 4，6，8，/ 6，8，10，/ 8，……

さらに，右のように段にすると，規則がますますわかりやすくなります。

2，4，6，
4，6，8，
6，8，10，
8，……

１段に３個ずつ数がならんでいます。
70 ÷ 3 = 23 あまり 1　ですから，70 番目の数までに，23 段と，あと１個の数があります。

1段目… 2，4，6，
2段目… 4，6，8，
3段目… 6，8，10，
4段目… 8，……
⋮
23段目…○，○，○
○
1個あまっている

あまっている１個は，24 段目の数です。
よって，70 番目の数を求めるというのは，24 段目の１番目の数を求めることになります。

1段目… 2，4，6，
2段目… 4，6，8，
3段目… 6，8，10，
4段目… 8，……

23段目…○，○，○
24段目…$\boxed{○}$
この数を求める

（次のページへ）

ところで，1 段目の 1 番目の数は 2，2 段目の 1 番目の数は 4，3 段目の 1 番目の数は 6，4 段目の 1 番目の数は 8 です。

つまり，何段目であろうとも，1 番目の数は，その段の数の 2 倍になっています。

1段目…2，　4，　6，
2段目…4，　6，　8，
3段目…6，　8，　10，
4段目…8，　……

23段目…○，○，○
24段目…○

この数を求める

ですから，24 段目の 1 番目の数は，24 × 2 = 48 になります。

1段目…2，　4，　6，
2段目…4，　6，　8，
3段目…6，　8，　10，
4段目…8，　……

23段目…○，○，○
24段目…48

この数を求める

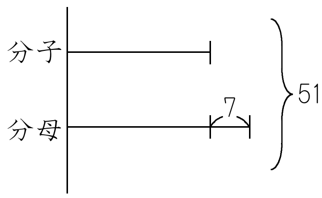
反復基本 $\boxed{1}$ (5)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　分子と分母の差に注目しましょう。

1番目の分子と分母の差は，$9-2=7$ です。
2番目の分子と分母の差も，$10-3=7$ です。
3番目の分子と分母の差も，$11-4=7$ です。

このようにして，何番目の分数であろうとも，分子と分母の差は，必ず7になっています。
したがって，分子と分母の和が51である分数でも，分子と分母の差は必ず7になっています。

分子と分母の和が51，差が7ですから，右のような線分図になります。



分子は，$(51-7)\div 2=22$ になります。

ところで，1番目の分数の分子は2，2番目の分数の分子は3，…ですから，□番目の分数の分子は □＋1 となります。

いま，分子は22ですから，□＋1＝22 となり，この分数は $22-1=21$ 番目の分数です。

また，分母は分子よりも7大きいのですから，分子が22なら，分母は $22+7=29$ です。
よって，21番目の分数は，$\dfrac{22}{29}$ になります。

反復基本 $\boxed{1}$ (6)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　段にして書きましょう。

分子と分母の和が同じ数のものは同じ段になるようにして，右のように段にして書きます。

$$\frac{1}{1},$$
$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},$$
$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},$$
$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},$$
$$\frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

１段目には分子と分母の和が２の分数が１個ならんでいます。
２段目には分子と分母の和が３の分数が２個ならんでいます。
３段目には分子と分母の和が４の分数が３個ならんでいます。
４段目には分子と分母の和が５の分数が４個ならんでいます。

同じように考えると，$\frac{2}{8}$ は，分子と分母の和が $2+8=10$ の段の２個目にあります。

	和	個数
$\frac{1}{1},$	→ 2	1個
$\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},$	→ 3	2個
$\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},$	→ 4	3個
$\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},$	→ 5	4個
$\frac{1}{5},\ \cdots\cdots$	→ 6	5個
$\cdots\cdots$		
$\frac{1}{8},\ \cdots\cdots$	→ 9	8個
$\frac{1}{9},\ \frac{2}{8}$	→10	2個

和が９の分数は８個ありますから，右の表のようになり，全部で，
$(1+2+3+4+5+6+7+8)+2=(1+8)\times 8\div 2+2=38$（個）
の分数がならんでいます。

よって，$\frac{2}{8}$ は 38 番目の分数です。

反復基本 $\boxed{2}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　「８段目の４列目」という答えにしやすいです。注意しましょう。

右のように，１段に７個ずつ，数がならんでいます。

1	2	3	4	5	6	7	⟶	7個
8	9	10	11	12	13	14	⟶	7個
15	16	17	18	19	…		⟶	7個

…………………………
…………………………

60 ÷ 7 = 8 あまり 4 ですから，60までには，８段ならんでいて，あと４個あまっています。
４個あまっている数のうち，最後の数が，60になります。

8段	1	2	3	4	5	6	7	⟶	7個
	8	9	10	11	12	13	14	⟶	7個
	15	16	17	18	19	…		⟶	7個

…………………………
…………………………

9段目　○　○　○　○

これが60

ということは，60があるのは，８段目ではなく，その次の，９段目になります。

よって，60は，９段目の４列目の数になります。

反復基本 $\boxed{2}$ (2)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　等差数列のＮ番目の公式と，等差数列の和の公式を利用します。

３列目の数は，3，10，17，…のように，７ずつ増えている等差数列になっています。

この数列の，はじめから18番目までの和を求める問題です。

等差数列の和を求めるには，次の公式を利用します。

等差数列の和 ＝（はじめの数 ＋ おわりの数）× Ｎ ÷２

はじめの数は３で，個数は１番目から18番目までの18個です。
あとは，おわりの数さえわかれば，答えを求めることができます。

おわりの数というのは，18番目の数のことですから，次の公式を利用します。

等差数列のＮ番目 ＝ はじめの数 ＋ 増える数 ×（Ｎ －１）

はじめの数は３で，増える数は７，おわりの数は18番目の数ですから，Ｎを18にして，

$3 + 7 \times (18 - 1) = 3 + 7 \times 17 = 3 + 119 = 122$

よって，おわりの数は122であることがわかりました。
あらためて，次の公式を使って，

等差数列の和 ＝（はじめの数 ＋ おわりの数）× Ｎ ÷２

１番目の数から18番目の数までの和 ＝（3 ＋ 122）× 18 ÷ 2 ＝ 1125 になります。

反復基本 $\boxed{2}$ (3)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　16段目の７列目の数は，簡単に求めることができます。

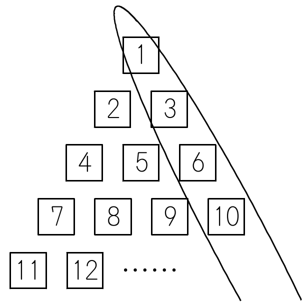
７列目の数は，１段目から７，14，21，… のように，７の倍数になっています。
よって，16段目の７列目の数は，$7 \times 16 = 112$ です。

そこで，16段目にならんでいる数を，７列目から前にもどっていって１列目まで書くと，112，111，110，109，108，107，106 となります。
その和を求める問題ですから，等差数列の和の公式を利用して，
(はじめ＋おわり)×個数÷２＝（112 ＋ 106）× 7 ÷ 2 ＝ 763 となります。

反復基本 $\boxed{3}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　それぞれの段の，右はしの数に注目しましょう。

それぞれの段の右はしの数は，
1，
1 ＋ 2 ＝ 3，
1 ＋ 2 ＋ 3 ＝ 6，
1 ＋ 2 ＋ 3 ＋ 4 ＝ 10，
………



のように，たとえば４段目なら，１から４までの和になっています。
このような数のことを，「三角数」といいます。

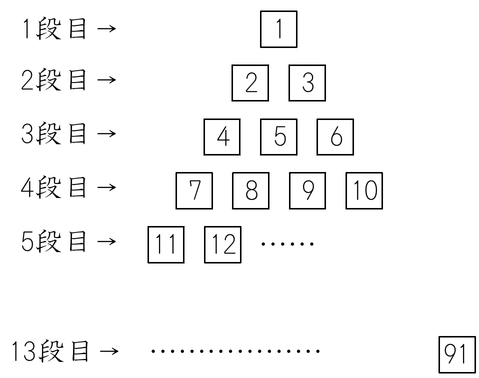
この問題は，まず 90 に近い三角数を見つけることが大切です。

90 が，１から何までの和なのかを求める簡単な方法はありません。

次の三角数をおぼえておくと役に立ちます。

１から４までの和	… 10
１から 10 までの和	… 55
１から 13 までの和	… 91

つまり，13 段目の右はしの数は，91 であることがわかりました。



13 段目には 13 個の数が並んでいますから，91 は 13 段目の 13 番目の数です。

90 は 91 のすぐ左にある数ですから，答えは13 段目の 12 番目になります。

反復基本 $\boxed{3}$ (2)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　15段目の，右はしの数に注目しましょう。

(1)で，それぞれの段の右はしの数には，特ちょうがあることがわかりました。

たとえば，4段目の右はしの数なら，1＋2＋3＋4＝10のように，1から4までの整数の和になっています。

15段目の右はしの数は，1＋2＋3＋…＋15の計算をすればよいことになります。
等差数列の和の公式である，

$$\boxed{\text{等差数列の和}＝(\text{はじめの数}＋\text{おわりの数})\times N\div 2}$$

において，はじめの数は1，おわりの数は15，個数であるNは15ですから，
（1＋15）×15÷2＝120 になります。

また，15段目のすぐ上である，14段目の右はしの数は，（1＋14）×14÷2＝105です。
（1から15までの和である120から，15を引いて求めてもＯＫです。）

14段目の右はしの数は105ですから，15段目は，その次の数である106から始まります。

よって，15段目は，106，107，…のように続いていって，いちばん右はしは120まで，数がならんでいます。

この問題は，その和を求める問題ですから，等差数列の和の公式である，

$$\boxed{\text{等差数列の和}＝(\text{はじめの数}＋\text{おわりの数})\times N\div 2}$$

を利用します。

はじめの数は106，おわりの数は120，個数であるNは，15段目には15個の数がならんでいますから，15です。

よって，（106＋120）×15÷2＝1695 になります。

反復基本 $\boxed{4}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　数を四角くならべていく問題は，「平方数」と関係があります。

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
第１段	1	4	9	16	・
第２段	2	3	8	15	・
第３段	5	6	7	14	
第４段	10	11	12	13	
第５段	17	18	・	・	

右の表の１段目には，数が 1，4，9，16，…とならんでいます。

1 × 1 = 1，2 × 2 = 4，3 × 3 = 9，4 × 4 = 16，…と，「平方数」になっています。

たとえば１段目の 8 列目なら，8 × 8 = 64 になります。

ですから，１段目の 20 列目は，20 × 20 = 400 になります。

反復基本 $\boxed{4}$ (2)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　第１段第19列の数から考えていきます。

数は，右のように ⮥ の順に増えていっています。

第１段の数は，平方数になっています。

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
第１段	1	4	9	16	・
第２段	2	3	8	15	・
第３段	5	6	7	14	
第４段	10	11	12	13	
第５段	17	18	・	・	

右の表のかげをつけた，第１段第19列の数は，19 × 19 = 361です。

361の次の数である362は，第20段第１列（★の部分）になります。

同じように考えて，第20段第10列（？の部分）は，361 + 10 = 371 になります。

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列	第6列	第7列	第8列	第9列	第10列	第11列	第12列	第13列	第14列	第15列	第16列	第17列	第18列	第19列	第20列
第１段	1	4	9	16																
第２段	2	3	8	15																
第３段	5	6	7	14																
第４段	10	11	12	13																
第５段	17	18																		
第６段																				
第７段																				
第８段																				
第９段																				
第10段																				
第11段																				
第12段																				
第13段																				
第14段																				
第15段																				
第16段																				
第17段																				
第18段																				
第19段																				
第20段																				

★　？

反復基本 $\boxed{4}$ (3)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　250に近い平方数を探します。

(1)でわかった通り，表の１段目には，平方数がならんでいます。

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
第１段	1	4	9	16	・
第２段	2	3	8	15	・
第３段	5	6	7	14	
第４段	10	11	12	13	
第５段	17	18	・	・	

たとえば１段目の８列目なら，８×８＝64になります。
たとえば100なら，10×10＝100ですから，１段目の10列目であることがわかります。
(3)の問題では，250が何段目の何列目であるかを求めるのですから，250に近い平方数を探し，その平方数から250までたどっていく，という求め方をします。

250に近い平方数の探し方は，簡単な方法はありません。おおよその見当をつけてやってみるしかありません。

16×16＝256 が，第１段第16列にあって，250に最も近い平方数です。（右の表のかげをつけた部分。）

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列	第6列	第7列	第8列	第9列	第10列	第11列	第12列	第13列	第14列	第15列	第16列
第１段	1	4	9	16												
第２段	2	3	8	15												
第３段	5	6	7	14												
第４段	10	11	12	13												
第５段	17	18														
第６段																
第７段																
第８段																
第９段																
第10段																
第11段																
第12段																
第13段																
第14段																
第15段																
第16段																

よって，
第２段第16列 … 255
第３段第16列 … 254
第４段第16列 … 253
第５段第16列 … 252
第６段第16列 … 251
第７段第16列 … 250

となりますから，答えは，
第７段第16列 になります。

反復練習 $\boxed{1}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　それぞれの組の，最後の数に注目しましょう。

２組は(4，6)ですから，２組の最後の数は６です。
３組は(8，10，12)ですから，３組の最後の数は 12 です。

１組の最後の数が２だと考えて，それぞれの組の最後の数だけ書いていくと，右のようになります。

1組	2組	3組	4組	
2，	6，	12，	20，	……
	+4	+6	+8	

86 をオーバーするまで書いていくと，右のようになります。

1組	2組	3組	4組	5組	6組	7組	8組	9組	
2，	6，	12，	20，	30，	42，	56，	72，	90，	……
	+4	+6	+8	+10	+12	+14	+16	+18	

ところで，１組には(2)だけの１個の数が，２組には(4，6)の2個の数が，３組には(8，10，12)の３個の数が入っているように，９組には９個の数が入っています。
90は，９組の最後の数ですから，９組の９番目の数です。
よって 88 が，９組の８番目の数になり，86 は，９組の７番目の数になります。

反復練習 $\boxed{1}$ (2)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　12組のはじめの数とおわりの数と，個数を求めれば計算できます。

(1)で，9組の最後の数まで計算してしまっていますので，もう少しで12組です。そのまま計算していきましょう。

1組	2組	3組	4組	5組	6組	7組	8組	9組	10組	11組	12組	
2，	6，	12，	20，	30，	42，	56，	72，	90，	110，	132，	156，	…

＋4　＋6　＋8　＋10　＋12　＋14　＋16　＋18　＋20　＋22　＋24

これで，12組の最後の数は，156であることがわかりました。

また，11組の最後の数は132ですから，その次の数である134は，12組のはじめの数であることもわかります。

ところで，1組には1個，2組には2個，…の数があるのですから，12組には12個の数があります。

よって，等差数列の和の公式である，

$$\boxed{\text{等差数列の和} = (\text{はじめの数} + \text{おわりの数}) \times N \div 2}$$

のうち，はじめの数は134，おわりの数は156，Nは12であることがわかったので，
12組の数の和は，$(134 + 156) \times 12 \div 2 = 1740$ になります。

反復練習 $\boxed{2}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　段にして書きましょう。

　分母が同じ数のものは同じ段になるようにして，右のように段にして書きます。

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{1}, \\
\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \\
\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \\
\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \\
\frac{1}{5}, \cdots\cdots
\end{array}
$$

　１段目には分母が１の分数が１個ならんでいます。

　２段目には分母が２の分数が２個ならんでいます。

　３段目には分母が３の分数が３個ならんでいます。

　４段目には分母が４の分数が４個ならんでいます。

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{1}, & \longrightarrow 1\text{個} \\
\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, & \longrightarrow 2\text{個} \\
\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, & \longrightarrow 3\text{個} \\
\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, & \longrightarrow 4\text{個} \\
\frac{1}{5}, \cdots\cdots &
\end{array}
$$

　同じように考えると，$\frac{7}{10}$ がならんでいる段のすぐ上の段である，分母が９の段には，９個の分数がならんでいます。

　分母が 10 の段には，$\frac{1}{10}$ から $\frac{7}{10}$ までの７個の分数がならんでいますから，全部で，

　(１＋２＋…＋９)＋７
＝(１＋９)×９÷２＋７
＝45＋７
＝52（個）になります。

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{1}, & \longrightarrow 1\text{個} \\
\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, & \longrightarrow 2\text{個} \\
\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, & \longrightarrow 3\text{個} \\
\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, & \longrightarrow 4\text{個} \\
\frac{1}{5}, \cdots\cdots & \longrightarrow 5\text{個} \\
\cdots\cdots & \\
\frac{1}{9}, \cdots\cdots & \longrightarrow 9\text{個} \\
\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \cdots\cdots, \frac{7}{10} & \longrightarrow 7\text{個}
\end{array}
$$

　よって，$\frac{7}{10}$ は，はじめから数えて 52 番目の分数になります。

反復練習 $\boxed{2}$ (2)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　１から10までの和は55になることを，おぼえておきましょう。

１から４までの和は10，１から10までの和は55，１から13までの和は91であることを，おぼえておきましょう。

分母が１である分数は１個，
分母が２である分数は２個，
………………………………

となりますから，10個になるのは，分母が10の分数です。

分母が10の分数までで，全部で，
１＋２＋…＋10＝55（個）になります。
分母が11の分数までだと，全部で，
55＋11＝66（個）です。

あと，75－66＝9（個）で，75個になります。

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\left.
\begin{array}{ll}
\frac{1}{1}, & \longrightarrow 1\text{個} \\
\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}, & \longrightarrow 2\text{個} \\
\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}, & \longrightarrow 3\text{個} \\
\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}, & \longrightarrow 4\text{個} \\
\frac{1}{5},\ \cdots\cdots & \longrightarrow 5\text{個} \\
\cdots\cdots & \\
\frac{1}{11},\ \cdots\cdots & \longrightarrow 11\text{個}
\end{array}
\right\}66\text{個} \\
\frac{1}{12},\ \cdots\cdots\ ,\frac{9}{12} \longrightarrow 9\text{個} &
\end{array}
\right\}75\text{個}
$$

よって，75番目の分数は，$\frac{9}{12}$になります。

段ごとに和を求めていくと，
たとえば一番上の段の１個は$\frac{1}{1}=1$です。

次の段の２個の和は，$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=1.5$です。

次の段の３個の和は，$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=2$です。

途中省略して，

11段目の11個の和は，$\frac{1}{11}+\frac{2}{11}\cdots+\frac{11}{11}=6$です。

（次のページへ）

11 段目までの和は，1 段目が 1，2 段目が 1.5，3 段目が 2 と，0.5 ずつ増えていって，最後の 11 段目が 6 ですから，（はじめ＋おわり）×個数÷ 2 ＝（1 ＋ 6）× 11 ÷ 2 ＝ 38.5 です。

$$\left.\begin{array}{lcc}
\frac{1}{1}, & \longrightarrow & 1 \\
\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}, & \longrightarrow & 1.5 \\
\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}, & \longrightarrow & 2 \\
\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}, & \longrightarrow & 2.5 \\
\frac{1}{5},\ \cdots\cdots & \longrightarrow & 3 \\
\cdots\cdots & & \vdots \\
\frac{1}{11},\ \cdots\cdots & \longrightarrow & 6
\end{array}\right\}\text{11段ぶんの和は38.5}$$

$$\frac{1}{12},\ \cdots\cdots\ ,\frac{9}{12} \longrightarrow \text{9個}$$

一番下の段に，$\frac{1}{12}$ から $\frac{9}{12}$ までの分数が残されています。

その分子の和は，公式を利用して，

1 ＋ 2 ＋ … ＋ 9
＝ (はじめ ＋ おわり) × 個数 ÷ 2
＝ (1 ＋ 9) × 9 ÷ 2
＝ 45

よって，$\frac{1}{12}$ から $\frac{9}{12}$ までの分数の和は，$\frac{45}{12}$ ＝ 3.75 になります。

以上のことから，1 番目から 75 番目までの分数のすべての和は，38.5 ＋ 3.75 ＝ 42.25 になります。

（※　分数で $42\frac{1}{4}$ と答えても，もちろん正解です。）

反復練習 $\boxed{3}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　１段目の数は，「三角数」になっています。

１段目の１列目は，１です。
１段目の２列目は，１＋２＝３です。
１段目の３列目は，１＋２＋３＝６です。

このように，１段目の数は，１から列の数までの和になっています。

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
第１段	1	3	6	10	15
第２段	2	5	9	14	・
第３段	4	8	13	・	・
第４段	7	12	・		
第５段	11	・			

ですから，１段目の８列目の数は，１から８までの和になります。

１＋２＋…＋８
＝（はじめ＋おわり）×個数÷２
＝（１＋８）×８÷２
＝36 になります。

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列	第6列	第7列	第8列
第１段	1	3	6	10	15	・	・	・
第２段	2	5	9	14	・			
第３段	4	8	13	・				
第４段	7	12	・					
第５段	11	・						
第６段	・							
第７段								
第８段								

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列	第6列	第7列	第8列
第１段	1	3	6	10	15	・	・	
第２段	2	5	9	14	・			
第３段	4	8	13	・	・			
第４段	7	12	・					
第５段	11	・						
第６段								
第７段								
第８段								

また，８段目の１列目の数は，１段目の７列目の，次の数です。

１段目の７列目の数は，１から７までの和になります。
１＋２＋…＋７
＝（はじめ＋おわり）×個数÷２
＝（１＋７）×７÷２
＝28 になります。
よって，８段目の１列目の数は，28 の次の数ですから，29 になります。

以上のことから，１段目の８列目の数は 36 で，８段目の１列目の数は 29 になります。

反復練習 3 (2)

ワンポイント　99 に近い「三角数」を，さがします。

１段目の１列目は，１です。
１段目の２列目は，１＋２＝３です。
１段目の３列目は，１＋２＋３＝６です。
このように，１段目の数は，１から列の数までの和になっています。
１からある整数までの和を，「三角数」といいます。
そこで，99 に近い「三角数」を，さがすことにします。

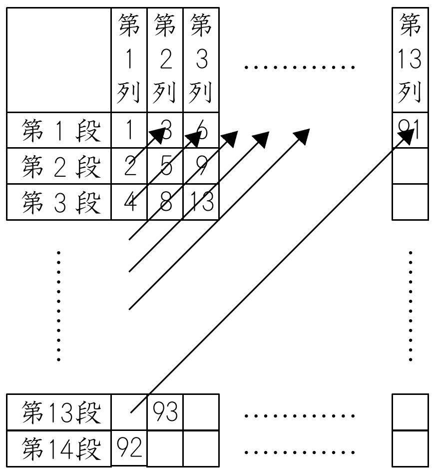
	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
第１段	1	3	6	10	15
第２段	2	5	9	14	・
第３段	4	8	13	・	・
第４段	7	12	・		
第５段	11	・			

１から 13 までの和は，91 です。（おぼえておきましょう。）
91 は，99 にかなり近い数です。

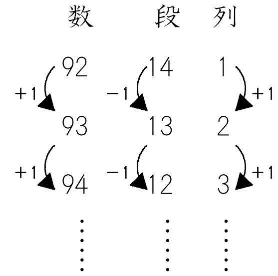
たとえば１段目の３列目の数なら，１から３までの和である６になっているように，91 は１から 13 までの和ですから，１段目の 12 列目の数です。

	第1列	第2列	第3列	…………	第13列
第１段	1	3	6		91
第２段	2	5	9		
第３段	4	8	13		

右の表のように，数は左下から右上に向かってならんでいます。



ですから，91 の次の数である 92 は，14 段目の１列目になります。その次の数である 93 は，13 段目の２列目になります。

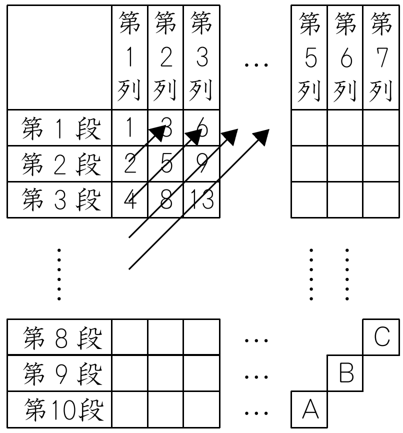


数を１増やすごとに，段の数は１減って，列の数は１増えます。
99 は，92 から 99 − 92 ＝７だけ増えているので，段の数は７減らして 14 − ７＝７になり，列の数は７増やして１＋７＝８になります。
よって，99 は**７段目の８列目**になります。

反復練習 $\boxed{3}$ (3)

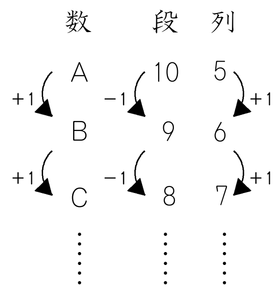
$\boxed{\text{ワンポイント}}$　10段目の５列目に近い「三角数」を，さがします。

数は左下から右上に向かってならんでいます。

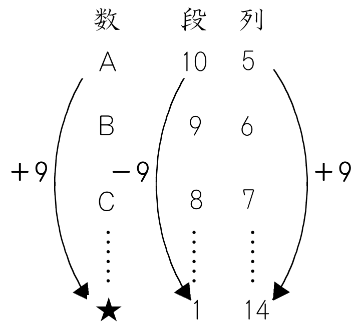


右の表のＡが，10段目の５列目の数です。
次の数であるＢは，右上に進んで，９段目の６列目になります。
その次の数であるＣは，８段目の７列目です。

このように，Ａからどんどん数を進ませていくと，段の数は１ずつ減り，列の数は１ずつ増えていきます。



すると，10段目から９段減らすと１段目になり，そのとき列の数は９列増えて，５＋９＝14（列目）になります。
このとき，数もＡから９増えた数になっているはずです。



ところで，１段目の数は，たとえば５列目ならば１＋２＋３＋４＋５＝15のように，１からその列の数までの和になっています。
ですから，１段目の14列目ならば，１から14までの和になるので，「(はじめ＋おわり)×個数÷２」の公式を利用して，(１＋14)×14÷２＝105です。
10段目の５列目の数よりも９増えた数が105なのですから，10段目の５列目の数は，105－９＝96になります。

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
第１段	1	3	6	10	15
第２段	2	5	9	14	・
第３段	4	8	13	・	・
第４段	7	12	・		
第５段	11	・			

反復練習 $\boxed{4}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　最小公倍数を利用しましょう。

この数列は，3の倍数と5の倍数を小さい順に並べたものです。

そこで，3と5の最小公倍数である15になったら次の段になるようにして，数をならべると，右のようになります。

3，5，6，9，10，12，15，
18，20，21，24，25，27，30，
33，35，36，39，40，42，45，
……………………………………

また，一番右には，15の倍数が並んでいます。

15 × 4 = 60 ですから，60は4段目の一番右に並んでいます。

3，5，6，9，10，12，15，
18，20，21，24，25，27，30，
33，35，36，39，40，42，45，
……………………………，60，

どの段でも，一番右の数よりも3小さいのが，その1つ左どなりの数です。

よって，57は60の1つ左どなりにあります。

−3
3，5，6，9，10，12，15，
18，20，21，24，25，27，30，
33，35，36，39，40，42，45，
………………………，57，60，

1段あたり，数は7個ずつならんでいますから，4段目の一番右にある60は，7 × 4 = 28（番目）の数です。

よって57は，27番目の数になります。

反復練習 4 (2)

ワンポイント　段にしたときに，80番目の数は何段目の左から何番目になるでしょうか。

(1)と同様に，数列を右のように段にして考えていきましょう。

3，	5，	6，	9，	10，	12，	15，
18，	20，	21，	24，	25，	27，	30，
33，	35，	36，	39，	40，	42，	45，
……						

1段あたり，数は７個ずつあります。
(2)では80個目の数を求める問題です
80 ÷ 7 = 11　あまり　3　ですから，80個目までに，11段と，あと３個の数があります。

右の表の，●の数を求める問題になります。

3， 5， 6， 9， 10， 12， 15，
18， 20， 21， 24， 25， 27， 30，
33， 35， 36， 39， 40， 42， 45，
……
……
……　（11段）

$\underbrace{○，○，●}_{3個}$

たてに見ていくと，●の数は，
6，21，36，…という等差数列の，12番目にあります。

3， 5， $\boxed{6}$， 9， 10， 12， 15，
18， 20， $\boxed{21}$， 24， 25， 27， 30，
33， 35， $\boxed{36}$， 39， 40， 42， 45，
……
……
……　（11段）

$\underbrace{○，○，●}_{3個}$

等差数列のＮ番目の数は，

$\boxed{はじめ＋増える数×(N－1)}$　で求められますから，●の数は，
6 + 15 × (12 － 1) = 171　になります。

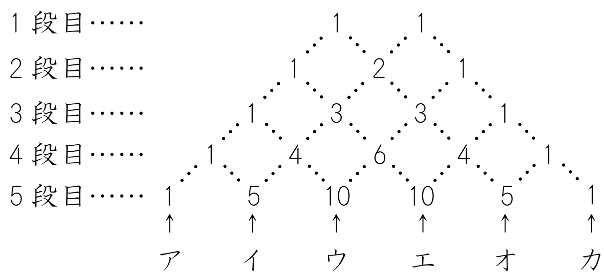
反復練習 $\boxed{5}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$ ５段目までは書いてあるので，あと３段くらい，書いてしまいましょう。

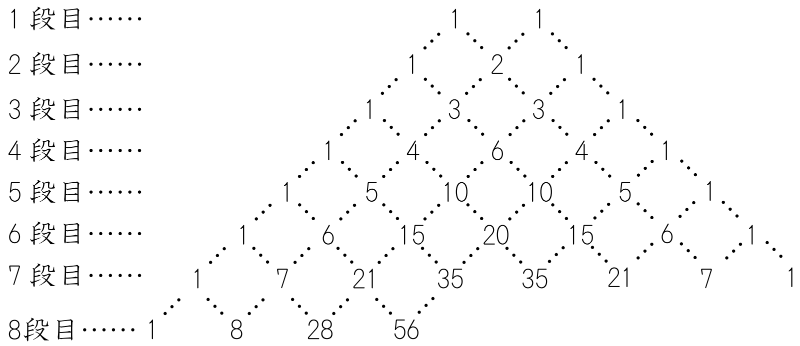
このように三角形の形で並べたものを，「パスカルの三角形」といいます。

次の段の数を作るきまりを，よく考えてみましょう。

たとえば５段目の場合，まず左右両はしに１を書き（右の表のアとカ），イは４段目の１と４を加えて５にし，ウは４段目の４と６を加えて10にし，エ・オ・カも同様に計算して，求めることができます。



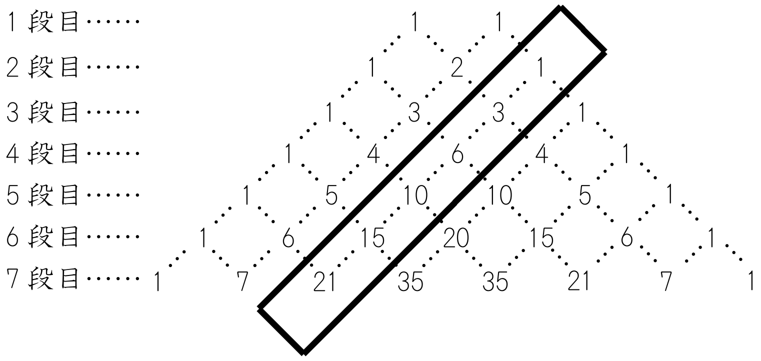
６段目・７段目・８段目も同じようにして右の表のように求めることができますから，〈8，4〉である，８段目の左から４番目は，56になります。



反復練習 $\boxed{5}$ (2)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　それぞれの段の，左から３番目の数には，あるきまりがあります。

それぞれの段の，左から３番目の数をワクでかこったのが，右の表です。



この表を見ると，左から３番目の数は，「三角数」になっていることに気づきます。

「三角数」というのは，
１＝１，
３＝１＋２，
６＝１＋２＋３，
10＝１＋２＋３＋４，
…………
という，１から□までの整数をすべて足した数のことです。

もし「91」なら，１＋２＋３＋…＋13 です。（覚えておいてください。）
よって，１＋２＋３＋…＋14＝91＋14＝105 です。
１＋２＋３＋…＋15＝105＋15＝120 です。

でも，答えは 15 ではありません。

なぜなら，たとえば１＋２＋３＋４の計算をすると 10 になりますが，10 は４段目ではなく５段目にあるように，１をプラスした段になるからです。
（左から３番目の数は，１段目からではなく２段目から始まっているのが原因です。）

よって 120 は，15＋１＝16（段目）にあるので，答えは 16 になります。

反復練習 $\boxed{5}$ (3)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　７段目あたりで実験してみて，10段目のことを考えましょう。

７段目までのようすを書いたのが下の表です。この表を見て，よく考えてみましょう。

１段目……　1　1
２段目……　1　2　1
３段目……　1　3　3　1
４段目……　1　4　6　4　1
５段目……　1　5　10　10　5　1
６段目……　1　6　15　20　15　6　1
７段目……　1　7　21　35　35　21　7　1

たとえば７段目では，全部で８個の数が並んでいます。（７個ではなく，１プラスした数である８個が並んでいることに注意しましょう。）
７段目の左から１番目の数である１と，左から８番目の数である１は，同じ数ですね。
「１番目＝８番目」ということです。
同様に，左から２番目の数と，左から7番目の数も同じです。
「２番目＝７番目」ということです。
他に，「３番目 ＝６番目」，「４番目 ＝５番目」もわかりますね。

ところで，これらの「△番目＝□番目」という式をじーっと見ていると，「△と□の和が，いつも９になっている」ことに気がつきます。

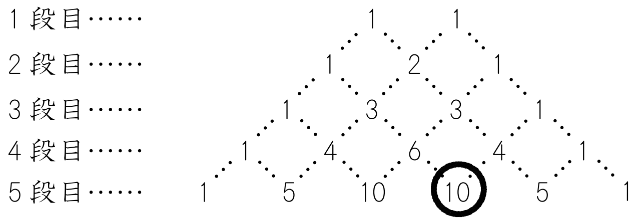
12段目の場合も，同じようにして考えてみます。
「△番目＝□番目」のとき，７段目だったら△と□の和はいつも９ですが，12段目のときは，全部で13個の数が並んでいるので，
「１番目 ＝ 13番目」
「２番目 ＝ 12番目」
………………
このように，和が14になるのです。

よって，〈12，10〉＝〈12，イ〉の，イに入る数は，14 － 10 ＝ 4 になります。

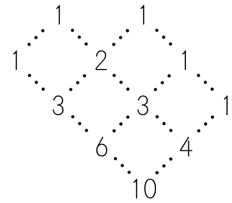
（次のページへ）

では次に，〈12，4〉は何という数になるのかを，考えてみましょう。

たとえば，5段目までの表は，右の表のようになっていました。
この中に，5段目の4番目の数である，「10」について考えてみます。

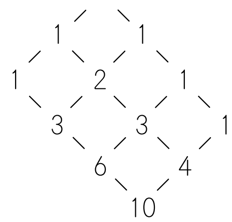


「10」を求めるのに関係ない数はすべて取りのぞくと，右の表のようになります。

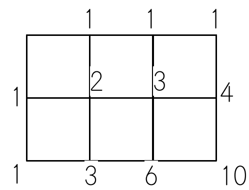


…どうですか，このような図，前にやったことがあるのではないですか？
これでも気づかないならば，

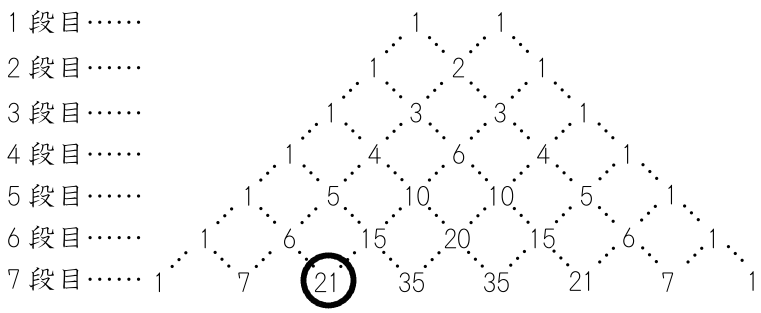
右の図ではどうでしょうか？



そう，これは右の図のような，ごばんの目の道を最短距離で通る場合の数を求めるのと，同じ形をしていますね。
つまり，5段目の左から4番目の数を求めるならば，横に3本，たてに2本あるごばんの目の道になります。
「左から4番目だったら，横に3本」になっていること，また，「5段目だったら，たてと横の本数の合計も5本」になっていることに，注意してください。



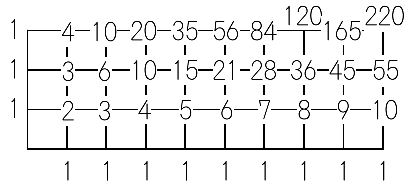
右の表の，7段目の3番目の数を求めるならば，横に2本，たてに5本あるごばんの目の道になります。
このときも，「左から3番目だったら，横に2本」になっていること，また，「7段目だったら，たてと横の本数の合計も7本」になっていますね。



（次のページへ）

ですから，12 段目の 4 番目の数を求めるときも同じように，
「左から 4 番目だから，横に 3 本」になり，「12 段目だから，たてと横の本数の合計も12本」であることがわかります。よって，たての本数は，12 − 3 = 9（本）です。

よって右の図のようになり，答えは 220 通りになります。



※　「12 本のたて棒のうち，3 本を横にする」と考えて，
12 本中 3 本を選ぶ = (12×11×10) ÷ (3×2×1) = 220 と求めてもＯＫです。

$\boxed{\text{チャレンジ}}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　等差数列の和の公式を利用しましょう。

１段目には分母が２の分数が，２段目には分母が３の分数が，３段目には分母が４の分数が書いてあります。

このように，その段に書いてある分数の分母は，段の数よりも１多くなっています。

ですから，15 段目に書いてある分数の分母は，16 です。

よって，$\frac{1}{16}$ から $\frac{15}{16}$ までの分数の和を求める問題になります。

ところで，１から 15 までの和は，「(はじめの数 ＋ おわりの数) × 個数 ÷ 2」という，等差数列の和の公式を利用します。

はじめの数は１で，おわりの数は 15 です。個数は 15 個なので，

$(1 + 15) \times 15 \div 2 = 120$ になります。

よって，$\frac{1}{16}$ から $\frac{15}{16}$ までの分数の和は，$\frac{120}{16} = 7\frac{1}{2}$ になります。

（※　小数で 7.5 と答えてもＯＫです。）

チャレンジ (2)

ワンポイント　それぞれの段の分数の和を求めていくと，規則に気がつきます。

1段目の1個の分数は，$\frac{1}{2}$ です。小数で表すと，0.5です。

2段目の2個の分数の和は，$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ です。

3段目の3個の分数の和は，$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{2}$ です。小数で表すと，1.5です。

このように，それぞれの段にある分数の個数の半分が，その段の分数の和になっています。

	個数		和
1段目	1	$\xrightarrow[\text{半分}]{}$	0.5
2段目	2	$\xrightarrow[\text{半分}]{}$	1
3段目	3	$\xrightarrow[\text{半分}]{}$	1.5

(2)の問題では，1段目から□段目までの分数すべての和が，138になっていたそうです。

この，138という数は，個数の半分になっているはずですから，1段目から□段目までの個数は全部で，138 × 2 = 276（個）になります。

つまり，1 + 2 + … + □ = 276 となるような□を求める，ということです。
このような□の簡単な求め方はありません。見当をつけてやっていきましょう。

たとえば，1から13までの和は91です。(おぼえましょう。)
1から20までの和なら，(1 + 20) × 20 ÷ 2 = 210です。(まあまあ近いですね。)
1から21までの和なら，210 + 21 = 231です。
1から22までの和なら，231 + 22 = 253です。
1から23までの和なら，253 + 23 = 276で，ぴったりです。

よって□は，23になります。

チャレンジ (3)

ワンポイント　(2)がわかれば，(3)はとても簡単です。

(2)で，それぞれの段にある分数の個数の半分が，その段の分数の和になっていることがわかりました。

	個数	和
1段目	$1 \xrightarrow[\text{半分}]{}$	0.5
2段目	$2 \xrightarrow[\text{半分}]{}$	1
3段目	$3 \xrightarrow[\text{半分}]{}$	1.5

いま，黒いタイルを 324 枚並べたのですから，分数の和は 324 の半分になるので，324 ÷ 2 ＝ 162 になります。