円周率を分数で表すことができないことの証明
（円周率は無理数であることの証明）

π を円周率とする。
円周率を分数で表すことができるものとし，正の整数 $p,\ q$ によって $\pi = \dfrac{p}{q}$ と表されると仮定する。

$$A_0 = \int_0^1 \pi \sin \pi t \, dt$$

$$A_n = \int_0^1 \frac{\bigl(p\pi t(1-t)\bigr)^n}{n!} \pi \sin \pi t \, dt \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

とおく。

第１段階　n が自然数であるとき，不等式　$1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} < e^x \qquad (x > 0)$　が成立する。

第２段階　不等式　$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n < \pi e^{p\pi}$　が成立する。

第３段階　$A_0 = 2,\ A_1 = 4q$　となる。

第４段階　$f_n(t) = \dfrac{(p\pi t(1-t))^n}{n!} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$　とおくと，

漸化式　$f_{n+1}{}''(t) = -q\pi^2(4n+2)f_n(t) + p^2\pi^2 f_{n-1}(t)$　が成立する。

第５段階　漸化式　$A_{n+1} = (4n+2)qA_n - p^2 A_{n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$　が成立する。

第６段階　$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$ は正の整数になる。

第７段階　第２段階と第６段階から，矛盾を導くことができる。
よって，円周率は分数で表すことができない。

第１段階の解説

与えられた式である，

$$(1) \qquad 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}<e^x \qquad (x>0)$$

は，$n=0$ のとき，

$1<e^x \qquad (x>0)$

となるが，$e=2.718\ldots$ なので，$1<e$ であるから，$x>0$ のとき $1<e^x$となるので，この式は正しい。

また，$n=k$ のとき，(1) の式が成立すると仮定すると，

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}<e^x \qquad (x>0)$$

である。変形して，

$$(2) \qquad e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}\right)>0 \qquad (x>0)$$

ここで，

$$g(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$$

とおくと，

$g(0)=e^0-1=1-1=0$ となり，しかも，

$$g'(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}\right)>0 \qquad (\because \quad (2)\text{ の式 })$$

$g(x)$ は $x=0$ のとき 0 の値をとり，しかも単調増加関数だから，$g(x)>0$ となる。つまり，

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^(k+1)}{(k+1)!}<e^x \qquad (x>0)$$

となり，$n=k+1$ のときも，(1) の式が成立する。

以上のことから，数学的帰納法により，n が自然数のときに (1) の式が成立することが証明された。

第 2 段階の解説

$0<t<1$ のとき，次の不等式が成り立つ。

$$0<1-t<1$$
$$0<t(1-t)<1$$
$$0<\bigl(t(1-t)\bigr)^n<1$$
$$0<\bigl(p\pi t(1-t)\bigr)^n<(p\pi)^n \qquad \text{（この } p \text{ は}, \pi=\frac{p}{q}\text{としたときの } p \text{ である。）}$$
$$0<\pi t<\pi$$
$$0<\sin \pi t\leq 1$$
$$0<\pi \sin \pi t\leq \pi$$
$$0<\int_0^1 \pi \sin \pi t\leq \pi \int_0^1 \, dt$$
$$0<\int_0^1 \pi \sin \pi t\leq \pi$$

よって，

(3) $\quad 0<A_0\leq \pi$

また，

$$0<\bigl(p\pi t(1-t)\bigr)^n\pi \sin \pi t<\bigl(p\pi)^n\pi$$
$$0<\frac{\bigl(p\pi t(1-t)\bigr)^n}{n!}\pi \sin \pi t<\frac{(p\pi)^n}{n!}\pi$$
$$0<\int_0^1 \frac{\bigl(p\pi t(1-t)\bigr)^n}{n!}\pi \sin \pi t\, dt<\frac{(p\pi)^n}{n!}\pi \int_0^1 \, dt$$
$$0<\int_0^1 \frac{\bigl(p\pi t(1-t)\bigr)^n}{n!}\pi \sin \pi t\, dt<\frac{(p\pi)^n}{n!}\pi$$

よって，

(4) $\quad 0<A_n<\dfrac{(p\pi)^n}{n!}\pi$

(3)，(4) から，

$$A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n$$
$$<\pi+\frac{p\pi}{1!}\pi+\frac{(p\pi)^2}{2!}\pi+\ldots+\frac{(p\pi)^n}{n!}\pi$$
$$=\pi\Bigl(1+\frac{p\pi}{1!}+\frac{(p\pi)^2}{2!}+\ldots+\frac{(p\pi)^n}{n!}\Bigr)$$
$$<\pi e^{p\pi} \qquad (\because \quad \text{(1) の式において，} x=p\pi \text{とする})$$

よって，不等式

$A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n<\pi e^{p\pi}$ が成立する。

第３段階の解説

$(-\cos\pi t)' = \pi\sin\pi t$ 　であるから，

$$A_0 = \int_0^1 \pi\sin\pi t\,dt = \Big[-\cos\pi t\Big]_0^1 = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$$

また，部分積分法を利用して，

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 p\pi t(1-t)\pi\sin\pi t\,dt \\
&= \Big[p\pi t(1-t)(-\cos\pi t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \Big(p\pi - 2p\pi t\Big)(-\cos\pi t)\,dt \qquad \Big(\because\quad \big(p\pi t(1-t)\big)' = p\pi - 2p\pi t\quad\Big) \\
&= \int_0^1 \Big(p\pi - 2p\pi t\Big)\cos\pi t\,dt \\
&= \int_0^1 p\pi\cos\pi t - \int_0^1 2p\pi t\cos\pi t\,dt \\
&= \Big[p\sin\pi t\Big]_0^1 - \int_0^1 2p\pi t\cos\pi t\,dt \qquad \Big(\because\quad (\sin\pi t)' = \pi\cos\pi t\quad\Big) \\
&= -\int_0^1 2p\pi t\cos\pi t\,dt \qquad \Big(\because\quad \sin 0 = 0,\ \sin\pi = 0\quad\Big) \\
&= -\Big[2pt\sin\pi t\Big]_0^1 + \int_0^1 2p\sin\pi t\,dt \qquad \Big(\because\quad (\sin\pi t)' = \pi\cos\pi t,\ (2pt)' = 2p\quad\Big) \\
&= \int_0^1 2p\sin\pi t\,dt \qquad \Big(\because\quad \sin 0 = 0,\ \sin\pi = 0\quad\Big) \\
&= \Big[-\frac{2p}{\pi}\cos\pi t\Big]_0^1 \qquad \Big(\because\quad -\frac{1}{\pi}\cos\pi t)' = \sin\pi t\quad\Big) \\
&= (-\frac{2p}{\pi}\cos\pi) - (-\frac{2p}{\pi}\cos 0) \\
&= \frac{2p}{\pi} + \frac{2p}{\pi} \\
&= \frac{4p}{\pi} \\
&= 4p\cdot\frac{q}{p} \qquad \Big(\because\quad \pi = \frac{p}{q}\quad\Big) \\
&= 4q
\end{aligned}$$

第４段階の解説

(5) $f_n'(t) = \dfrac{n\big(p\pi t(1-t)\big)^{n-1}\cdot p\pi(1-2t)}{n!} = p\pi(1-2t)f_{n-1}(t)$

同様にして，

(6) $f_{n+1}{}'(t) = p\pi(1-2t)f_n(t)$

また，$f_n(t) = \dfrac{\big(p\pi t(1-t)\big)^n}{n!} = \dfrac{p\pi t(1-t)}{n}\cdot\dfrac{\big(p\pi t(1-t)\big)^{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{p\pi t(1-t)}{n}f_{n-1}(t)$ であるから，

(7) $p\pi t(1-t)f_{n-1}(t) = nf_n(t)$

よって，

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}{}''(t) &= \Big(p\pi(1-2t)f_n(t)\Big)' && (\because\ \ (6)\text{ の式 })\\
&= \big(p\pi(1-2t)\big)'f_n(t) + p\pi(1-2t)f_n'(t)\\
&= -2p\pi f_n(t) + p^2\pi^2(1-2t)^2 f_{n-1}(t) && (\because\ \ (5)\text{ の式 })\\
&= -2p\pi f_n(t) + p^2\pi^2(1-4t+4t^2)f_{n-1}(t)\\
&= -2p\pi f_n(t) + p^2\pi^2 f_{n-1}(t) - 4p^2\pi^2 t(1-t)f_{n-1}(t)\\
&= -2p\pi f_n(t) + p^2\pi^2 f_{n-1}(t) - 4p\pi n f_n(t) && (\because\ \ (7)\text{ の式 })\\
&= -p\pi(4n+2)f_n(t) + p^2\pi^2 f_{n-1}(t)\\
&= -q\pi^2(4n+2)f_n(t) + p^2\pi^2 f_{n-1}(t) && \left(\because \pi = \frac{p}{q}\text{だから，} p = q\pi\ \right)
\end{aligned}
$$

第５段階の解説

$$
\begin{aligned}
\pi A_{n+1} &= \pi \int_0^1 \frac{\bigl(p\pi t(1-t)\bigr)^{n+1}}{(n+1)!} \pi \sin \pi t \, dt \\
&= \pi \int_0^1 f_{n+1}(t) \pi \sin \pi t \, dt \\
&= \pi \Bigl[f_{n+1}(t) \cdot (-\cos \pi t) \Bigr]_0^1 - \pi \int_0^1 f_{n+1}{}'(t) \cdot (-\cos \pi t) \, dt \qquad \left(\because \quad f_{n+1}(0) = 0,\ f_{n+1}(1) = 0 \quad \right) \\
&= \pi \int_0^1 f_{n+1}{}'(t) \cos \pi t \, dt \\
&= \int_0^1 f_{n+1}{}'(t) \pi \cos \pi t \, dt \\
&= \Bigl[f_{n+1}{}'(t) \sin \pi t \Bigr]_0^1 - \int_0^1 f_{n+1}{}''(t) \sin \pi t \, dt \\
&= -\int_0^1 f_{n+1}{}''(t) \sin \pi t \, dt \qquad \left(\because \quad \sin 0 = 0,\ \sin \pi = 0 \quad \right) \\
&= -\int_0^1 \Bigl(-q\pi^2(4n+2) f_n(t) + p^2 \pi^2 f_{n-1}(t) \Bigr) \sin \pi t \, dt \qquad \left(\because \quad \text{第４段階の漸化式} \quad \right) \\
&= (4n+2) q\pi \int_0^1 f_n(t) \pi \sin \pi t \, dt - p^2 \pi \int_0^1 f_{n-1}(t) \pi \sin \pi t \, dt \\
&= (4n+2) q\pi A_n - p^2 \pi A_{n-1}
\end{aligned}
$$

よって，

$$A_{n+1} = (4n+2) q A_n - p^2 A_{n-1}$$

第６段階の解説

第３段階により，$A_0,\ A_1$ は整数であることがわかっている。

また，$A_k,\ A_{k-1}$ が整数であると仮定すると，第５段階より，

$$A_{k+1} = (4k+2)qA_k - p^2 A_{k-1}$$

となるが，$4k+2,\ q,\ A_k,\ p,\ A_{k-1}$ がどれも整数であるので，A_{k+1} も整数になる。

よって，数学的帰納法により，$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$ はどれも整数になる。

また，$0 < t < 1$ のとき，$\pi \sin \pi t > 0$ であり，$p\pi t(1-t) > 0$ でもあるから，

$$A_0 = \int_0^1 \pi \sin \pi t \, dt > 0,$$

$$A_n = \int_0^1 \frac{\big(p\pi t(1-t)\big)^n}{n!} \pi \sin \pi t \, dt > 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

よって，$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$ はどれも正の整数になる。

第７段階の解説

第２段階の不等式である，

$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n < \pi e^{p\pi}$

において，πも e も p も定数であるから，右辺の $\pi e^{p\pi}$ は，(いくら大きいにしろ) ある定まった数になる。

ところが左辺の $A_0, A_1, A_2, \ldots$ は，第６段階により，どれも正の整数であるから，$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ は，n を大きくすることによって，いくらでも大きい数にできる。

ということは，この不等式は，左辺をいくら大きくしても，$\pi e^{p\pi}$ という定数より小さい，ということを意味している。

これは，矛盾している。(どんな数よりも，大きい数は必ずあるはず。)

この矛盾は，円周率を分数で表すことができるものと仮定したことからおこった。

したがって，この仮定はまちがっていることになる。

よって，円周率を分数で表すことはできないことが証明された。

（証明終）