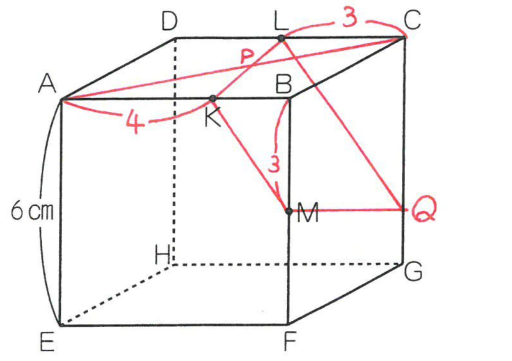
第６回　立体図形に関する問題Ⅰ

解答は89ページ

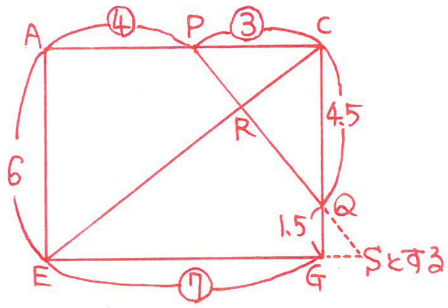
1　右の図のような，１辺の長さが６cmの立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがあります。辺ＡＢ，ＣＤ，ＢＦ上にそれぞれ点Ｋ，Ｌ，Ｍがあり，ＡＫ＝４cm，ＣＬ＝３cm，ＢＭ＝３cmとするとき，次の問いに答えなさい。



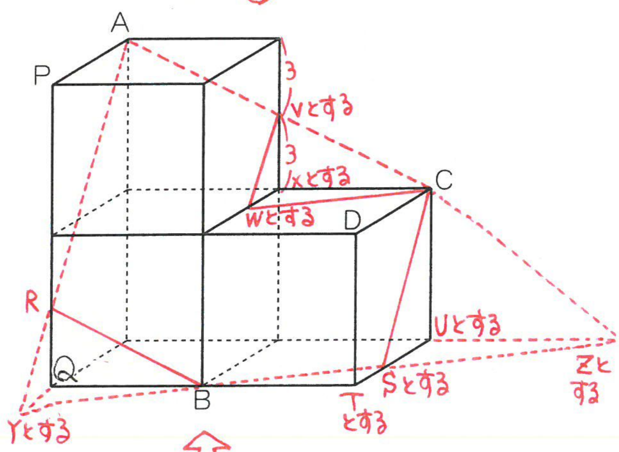
(1)　直線ＡＣとＫＬの交点をＰとするとき，ＡＰとＰＣの長さの比を求めなさい。クロス形。
AP:PC＝AK:CL＝$\boxed{4:3}$

(2)　３点Ｋ，Ｌ，Ｍを通る平面と辺ＣＧとの交点をＱとするとき，ＣＱの長さを求めなさい。KMとLQは平行。
KB:BM＝(6−4):3＝2:3だから，LC:CQも2:3。CQ＝3÷2×3＝$\boxed{4.5}$cm

(3)　３点Ｋ，Ｌ，Ｍを通る平面と直線ＣＥとの交点をＲとするとき，ＣＲとＲＥの長さの比を求めなさい。直線CEをふくむ平面である，面AEGCを考える。
面AEGCと，面LKMQは，点Pと点Qの２交点を持つので，PからQに直線を引く。
右図のようになる。
クロス形により，CQ:QG＝3:1だからPC:SGも3:1になり，SGは①になる。
クロス形により，CR:REはPC:SEと同じなので，3:(7+1)＝$\boxed{3:8}$。



2　１辺の長さが６cmの立方体３個を右の図のようにつないだ立体を，３点Ａ，Ｂ，Ｃを通る平面で切りました。これについて，次の問いに答えなさい。



上の立体で，ARは，6:9＝2:3ななめだから
CSも2:3ななめ。SU＝6÷3×2＝4cmだから
TS＝6−4＝2cm。
VWも2:3ななめだから，XW＝2cm。
RQも2:3ななめだから，YQ＝2cm。
CZは1:2ななめだから，UZ＝12cm。

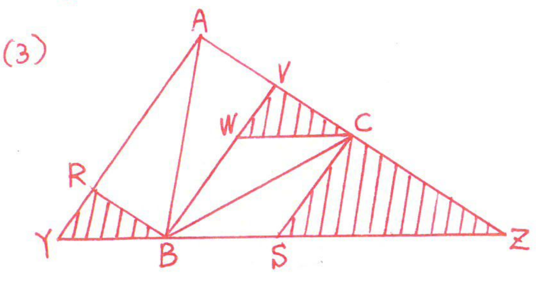
(1)　切り口がＰＱと交わる点をＲとします。ＰＲの長さを求めなさい。そして，切り口を右の図にかき入れなさい。上の段にも２個立方体があると思って，AからCまで線を引く。ACは，1:2ななめになっている。RBも1:2ななめだから，RQ＝6÷2＝3cm。PR＝$\boxed{9}$cm。

(2)　２つに切り分けられた立体のうち，点Ｄを含む立体の体積を求めなさい。

(3)　切り口の図形の面積は，三角形ＡＢＣの面積の何倍ですか。

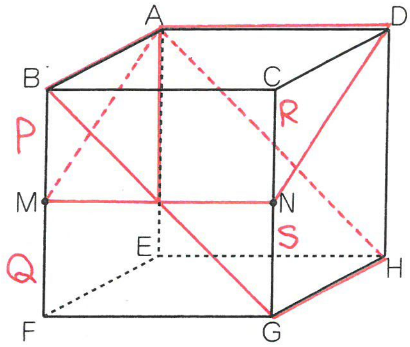
(2) Dをふくまない方の立体は，大きい三角すいから小さい三角すい３個を引く。
8×24÷2×12÷3−(2×6÷2×3÷3＋4×12÷2×6÷3＋2×6÷2×3÷3)
＝384−(6＋48＋6)
＝324　よってDをふくむ方は，6×6×6×3−324＝$\boxed{324}$cm³

(3)



全体を１とする。
三角形CSZは，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
〃　VWCは，$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$
〃　RYBも，〃
切り口の面積は，$1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\times2)=\frac{5}{8}$
三角形ABZは$\frac{3}{4}$なので，三角形ABCは$\frac{3}{4}\div2=\frac{3}{8}$
$\frac{5}{8}\div\frac{3}{8}=\boxed{1\frac{2}{3}}$倍

3　体積が72 cm³の立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨについて，辺ＢＦ，ＣＧの真ん中の点をそれぞれＭ，Ｎとします。いま，この立方体を３点Ａ，Ｂ，Ｇを通る平面と，３点Ａ，Ｍ，Ｎを通る平面で切ると，４つの立体に分けることができます。その中で，ＢＭ，ＭＦ，ＣＮ，ＮＧを含む立体をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓとおきます。これについて，次の問に答えなさい。



(1)　立体Ｐと立体Ｒの体積の和は何cm³ですか。

三角柱になる。全体の$\frac{1}{4}$だから，$72\times\frac{1}{4}=\boxed{18}$

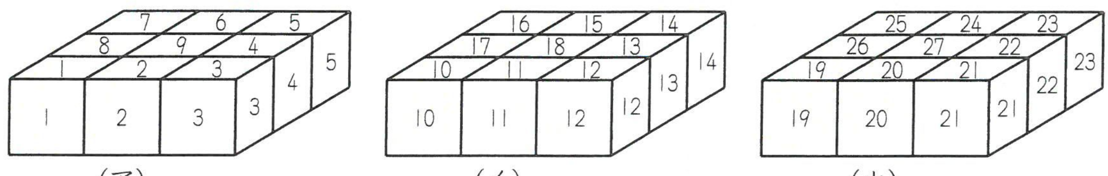
(2)　立体Ｐは三角すいとなります。この三角すいの体積は何cm³ですか。

BGとMNの交点をIとすると，三角形BMIの面積は正方形BFGCの面積の$\frac{1}{8}$だから，$72\times\frac{1}{8}\underbrace{\div 3}_{「すい」だから}=\boxed{3}$

(3)　立体Ｓの体積は何cm³ですか。

(1)・(2)から，Rの体積は，18－3＝15
RとSの和は全体の半分だから，72÷2＝36
Sの体積は，$36-15=\boxed{21}$

4　１番から27番まで１つずつ番号がついた同じ大きさの小さい立方体が27個あります。それらをつなげて，図の(ア)，(イ)，(ウ)を作り，さらに(ア)，(イ)，(ウ)を重ねて大きい立方体(エ)を作りました。この(エ)を次の(1)，(2)，(3)のような平面でそれぞれ切ったとき，切られた小さい立方体の番号の和をそれぞれ求めなさい。たとえば，３点Ａ，Ｂ，Ｃを通る平面で(エ)を切ったとき，切られた小さい立方体の番号の和は，２＋３＋４＋12＝21となります。

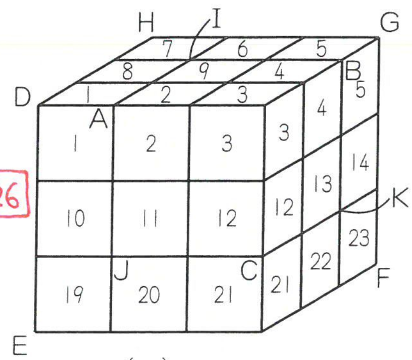


(ア)　　　(イ)　　　(ウ)

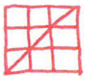
(1)　３点Ｄ，Ｅ，Ｆを通る平面

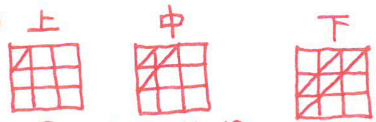
(2)　３点Ｈ，Ｅ，Ｆを通る平面

(3)　３点Ｉ，Ｊ，Ｋを通る平面



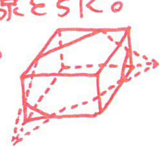
(エ)

(1) 上・中・下とも，  となる。$\underbrace{1+5+9}_{上}+\underbrace{10+14+18}_{中}+\underbrace{19+23+27}_{下}=\boxed{126}$

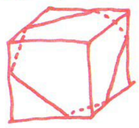
(2)


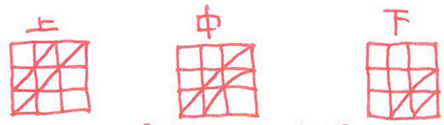
$7+15+16+17+19+23+24+26+27=\boxed{174}$

(3) まず，上・中2段だけの立体を考える。
JKは1:1ななめだから，Iを通って
1:1ななめになるように線を引く。
あとは「延長」の考え方から，



次に，上・中・下3段で考える。

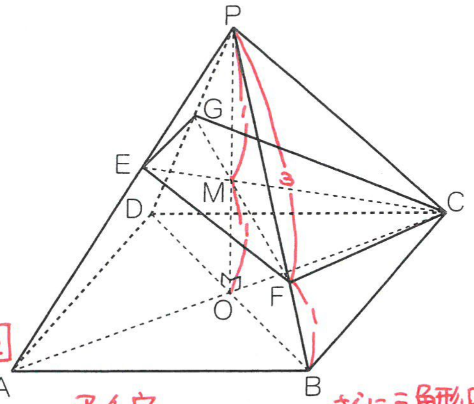




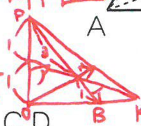
1+5+6+8+9+10+11+13+14+18+20+21+22
$=\boxed{158}$

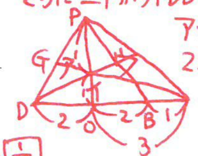
→「チェバ」と「延長」使いまくり

5 右の図のような，底面が正方形で側面が二等辺三角形でできている正四角すいＰ－ＡＢＣＤがあります。ＡＣとＢＤの交点をＯとし，頂点ＰとＯを結ぶとき，ＰＯはＡＣ，ＢＤにそれぞれ垂直になります。ＰＯの真ん中の点をＭとし，ＣＭの延長線と辺ＰＡの交点をＥとします。また，辺ＰＢを３：１に分ける点をＦ，平面ＥＦＣと辺ＰＤの交点をＧとすると，３点Ｇ，Ｍ，Ｆは一直線上に並びます。これについて，次の問いに答えなさい。



→三角形PACを使って  チェバにより　アイウ 1:2:1　PE:EA=$\boxed{1:2}$

(1)　ＰＥ：ＥＡ，ＰＧ：ＧＤを，それぞれ求めなさい。　→三角形POBを使って  Kとする　アイウ 2:1:1　OB:BK=ア:ウ=2:1

さらに三角形PDBを使って  ア:イ:ウ 2:5:3

(2)　三角すいＰ－ＥＣＧの体積は，正四角すいＰ－ＡＢＣＤの体積の何倍ですか。まず，P-ECGとP-DACをくらべる。それぞれの底面を，三角形PGEと三角形PDAにすると，同じ高さを持つことになるので，体積の比は底面積の比と同じ。えんぴつ形を利用して，$\frac{1}{1+2}\times\frac{3}{3+5}=\frac{1}{8}$だから，P-ABCDの，$\frac{1}{8}\div2=\boxed{\frac{1}{16}}$

PG:GD
=ウ:イ
=$\boxed{3:5}$

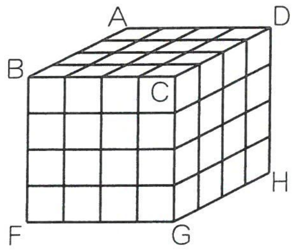
(3)　正四角すいＰ－ＡＢＣＤを平面ＥＦＣＧで切り，上側の立体の体積をＵ，下側の立体の体積をＶとします。このとき，ＵはＶの何倍ですか。上側の立体を，P-ECGと，P-EFCに分ける。

(2)より，P-ECGは全体の$\frac{1}{16}$であることがわかっている。P-EFCも同様にして，$\frac{3}{3+1}\times\frac{1}{1+2}\div2=\frac{1}{8}$

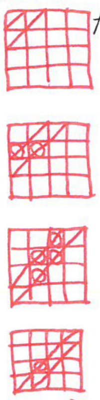
$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}\rightarrow U$　$1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}\rightarrow V$　$\frac{3}{16}\div\frac{13}{16}=\boxed{\frac{3}{13}}$倍。

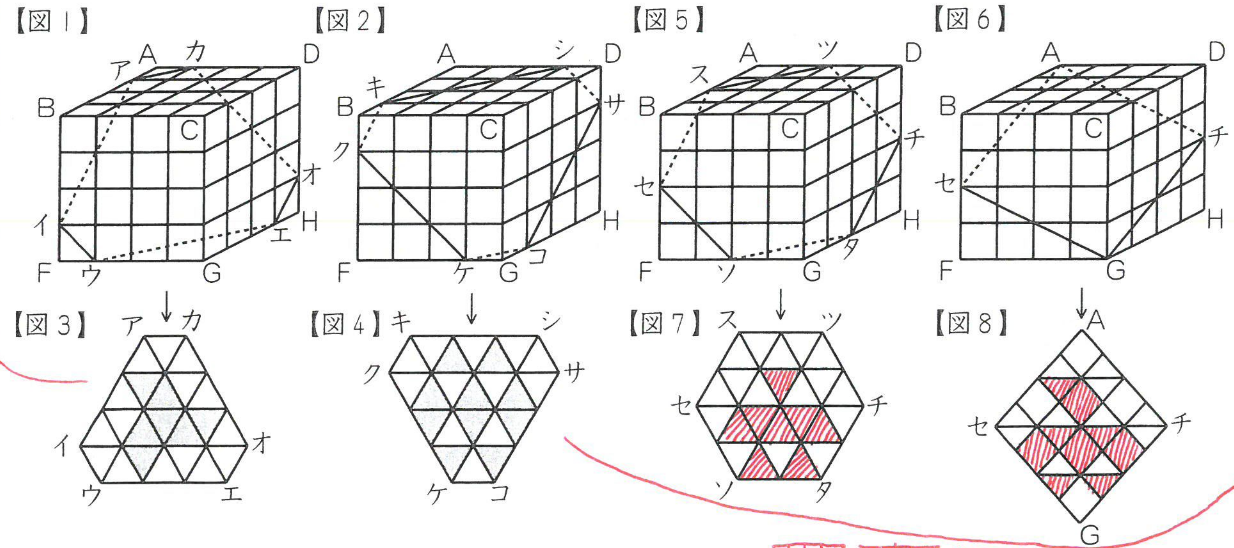
6 右の図のような立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨは，64個の同じ大きさの小さな立方体を積み上げて作ったもので，これらの小さな立方体は，それぞれ表面も中身も黒色または白色です。【図１】のように立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを切って切り口を調べてみたら【図３】のようになり，黒色の小さな立方体の部分が【図３】の黒く塗りつぶした部分のように見えました。【図２】のように立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを切って切り口を調べてみたら【図４】のようになり，黒色の小さな立方体の部分が【図４】の黒く塗りつぶした部分のように見えました。【図５】のように立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを切った切り口が【図７】，【図６】のように立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを切った切り口が【図８】です。【図１】から【図４】までの切り口のようすをもとに以下の問いに答えなさい。

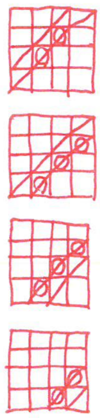
作業能力が必要。



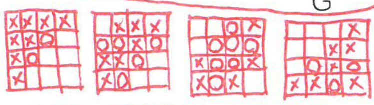
黒なら○にする



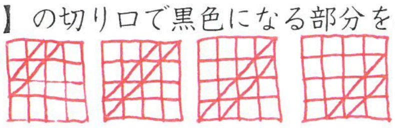
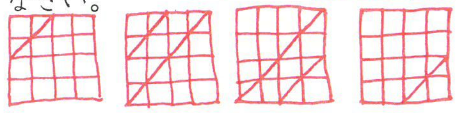




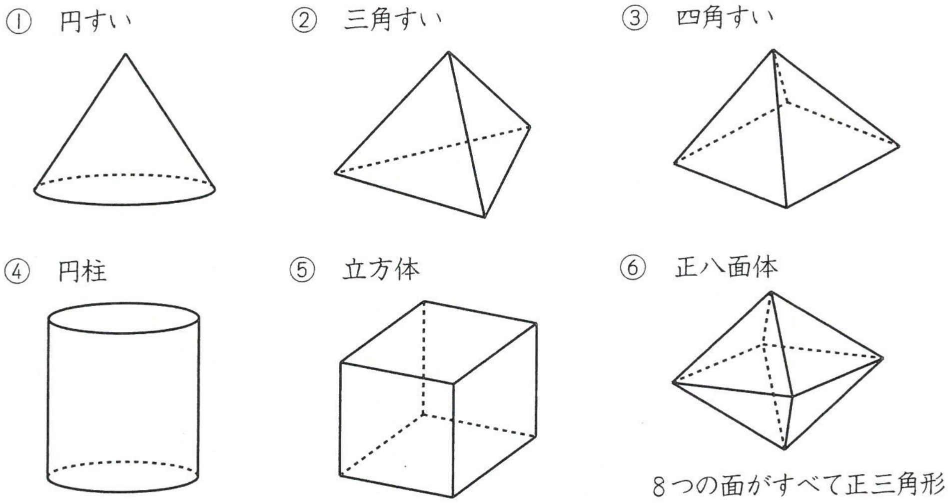
(1)　【図７】の切り口で黒色になる部分をぬりつぶしなさい。

図3と図4から、  がわかる。(○は黒，×は白，無は黒か白かわからない)

(2)　【図８】の切り口で黒色になる部分をぬりつぶしなさい。

(1)上から  (2)上から 

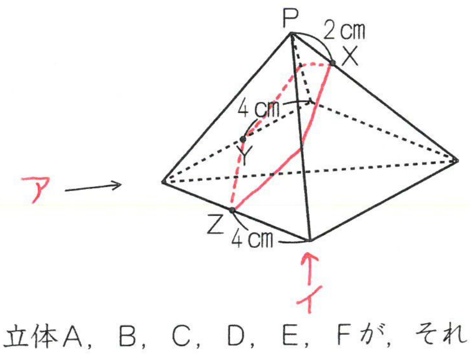
7　異なる６つの立体Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆは，それぞれ下の図にある①～⑥のどれかです。いま，この６つの立体をいろいろな平面で切断し，その切り口を調べたら，以下のイ，ロ，ハ，ニ，ホのような結果になりました。

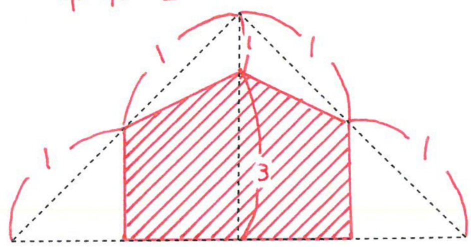


調べた結果
イ：立体Ａをある平面で切断したら，その切り口は円になった。
ロ：立体Ｂをある平面で切断したら，その切り口は四角形になった。
ハ：立体Ｂ，Ｃ，Ｄをある平面で切断したら，その切り口は三角形になった。
ニ：立体Ａ，Ｆをどの平面で切断しても，その切り口は六角形にはならなかった。
ホ：立体Ｄ，Ｆをある平面で切断したら，その切り口は五角形になった。

(1)　下の図のように立体③の各辺の長さを８cmとします。さらに，この立体を下の図の３点Ｘ，Ｙ，Ｚを通る平面で切断し，上部(点Ｐをふくむ部分)を取り除きます。このとき，残された立体を矢印の方向から見た図をかきなさい。イの方向から見ると，

ア イ ウ
1 : 3 : 2　よって，アウ：イ＝1：1





(2)　立体Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆが，それぞれどの立体であるかを①～⑥の数字で答えなさい。(ただし，立体Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆはそれぞれ異なる立体です。)

切断面は①円・三　②三・四　③三・四・五　④円・四　⑤三・四・五・六　⑥四・五・六
調べた結果を表で表すと，

	①	②	③	④	⑤	⑥
A		×	×		×	×
B	×			×		×
C				×		×
D	×	×		×		×
E						
F	×	×		×	×	×

→この表に×や○を書きこんでいくことによって，
A④，B②，C①，D⑤，E⑥，F③