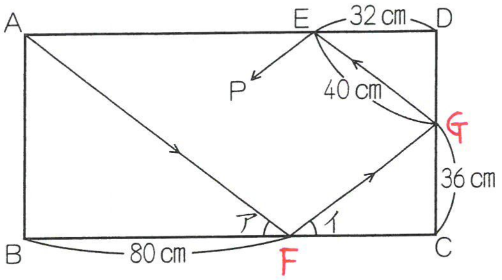
第４回　変化をとらえる問題Ⅰ

解答は75ページ

よく出題される

1 右の図のような長方形の台ＡＢＣＤがあります。いま，点Ａから発射された小さな玉Ｐが，矢印のように進みます。この玉Ｐは台のふちに当たるたびに，アとイの角の大きさが等しくなるように反射し，台のすみに当たると止まります。点Ｅは辺ＡＤを３：１に分ける点であるとして，次の問いに答えなさい。



(1) 辺ＡＢの長さを求めなさい。

AE＝32×3＝96cm。AD＝96＋32＝128cm。FC＝128−80＝48cm。FC：GC＝48：36＝4：3。ED：DGも4：3

(2) 玉ＰはＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄのうち，どのすみに当たって止まりますか。

だから，GD＝32×$\frac{3}{4}$＝24cm。
AB＝24＋36＝$\boxed{60}$cm。

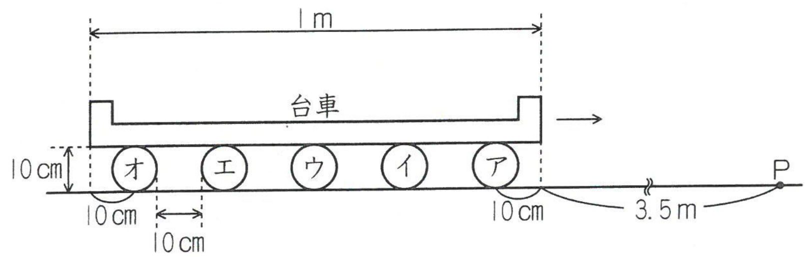
(3) 玉Ｐが止まるまでに進む距離は，全部で何ｍですか。

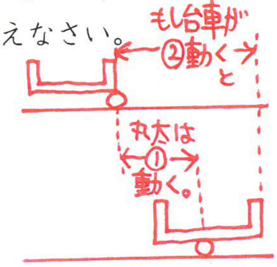
(2) 玉は，たてに60cm進むと，横に80cm進む。→これを１ステップとする。
長方形の横の長さは128cmだから，80と128の最小公倍数である640cm進んだとき，ぴったり。
640÷80＝8ステップぶん進んだときだから，AかDに着く。(奇数ステップのときBかC，偶数ステップのときAかD)。また，横には640÷128＝5辺ぶん進んで，CかDに着く。(奇数辺ならCかD，偶数辺ならAかB)。
よって，玉はAかD，CかDということになるので，答えは$\boxed{D}$。

(3) 三角形DEGを見るとわかる通り，たて：横：ななめ＝3：4：5
横に640cm進んだとき止まるのだから，640÷4×5＝800cm→$\boxed{8}$m

→頭がパニックになりやすい

2 次の図のように，ア〜オの５本の丸太をころにして台車を矢印の方向に動かします。台車の長さは１ｍ，丸太の直径は10cmで，台車が動くことによってはずれた丸太は前に移して，丸太どうしの間かくがどこも10cmになるようにします。円周率を３として，次の問いに答えなさい。





台車に対する丸太の位置も①ずれる。

(1) アの丸太が初めて台車からはずれるまでに，台車は何ｍ動きますか。また，このとき，アの丸太は何回転しますか。

台車に対するアの位置は100−10＝90cmずれるので，台車は90×2＝180cm→$\boxed{1.8}$m動く。丸太は90cm動くが，丸太の1周は10×3＝30cmなので，90÷30＝$\boxed{3}$回転。

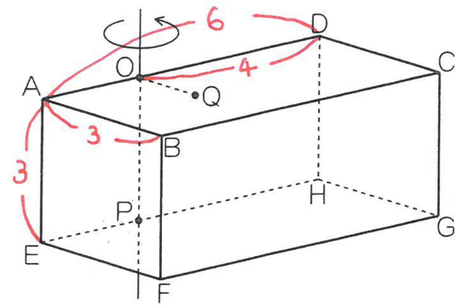
(2) 台車を3.5ｍ動かすには，丸太を全部で何回移さなければなりませんか。

(3) 3.5ｍ先にある点Ｐの上をころがって通る丸太は，ア〜オのうちどれですか。すべて記号で答えなさい。

(2) (1)から，台車が180cm動いたとき，ア となっていて，オ・エ・ウ・イの4個の丸太を移した。ここでアも移して，ア となる。これで5個移したことになる。　残り，350−180＝170cmだけ台車を動かすために，丸太は170÷2＝85cmだけ動かすから，ア 85 15 となる。よって，アの左にあったオ・エ・ウ・イの4個がまた移ったから，5+4＝$\boxed{9}$個。

(3) (2)のとき，台車の一番前がP。Pを通過し終えたとき，台車の一番後ろがPの位置。台車は100cm動いたので，丸太は100÷2＝50cm動く。そのとき，ア オ となり，アとオは左はしから右はしへ移したが，$\boxed{イ・ウ・エ}$は移さなかったので，Pの上をころがって通った。

3 右の図のように，ＡＢ＝３cm，ＡＤ＝６cm，ＡＥ＝３cm の直方体があります。点Ｏは辺ＡＤ上にあり，ＯＤ＝４cm です。また，点Ｐは辺ＥＨ上にあり，ＰＨ＝４cm，ＰＤ＝５cmです。この直方体を２点Ｏ，Ｐを通る直線を軸として１回転させるとき，次の問いに答えなさい。ただし，円周率を3.14とします。



(1) 点Ｑは長方形ＡＢＣＤ上にあり，ＡＯとＯＱは垂直で，ＯＱ＝１cmです。２点Ｃ，Ｑを結ぶ線がつくる図形の面積を求めなさい。

ドーナツ形。一番遠い点はＣで，Ｏから５cm。一番近い点はＱで，Ｏから１cm。

$5\times5\times3.14-1\times1\times3.14=\boxed{75.36}$

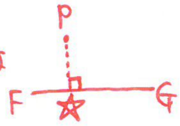
(2) 正方形ＤＨＧＣがつくる立体の体積を求めなさい。

底面はドーナツ形。一番遠い点はＣで，Ｏから５cm。一番近い点はＤで，Ｏから４cm。$(5\times5\times3.14-4\times4\times3.14)\times3=\boxed{84.78}$

(3) 三角形ＯＦＧがつくる立体の体積を求めなさい。

底面がドーナツ形の，すい体。

底面の一番遠い点はＧで，Ｐから５cm。一番近い点は



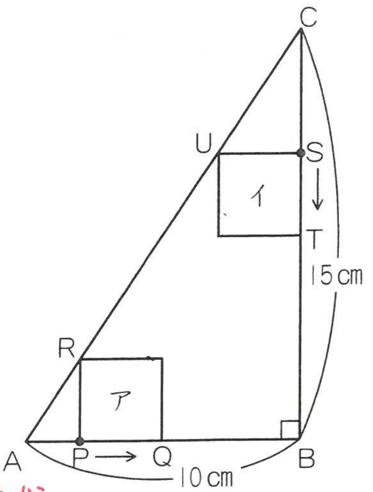
で，Ｐから３cm。

$(5\times5\times3.14-3\times3\times3.14)\times3\div3=\boxed{50.24}$

高さ「すい」だから

→いい問題。

4 右の図の三角形ＡＢＣは直角三角形です。いま，２つの正方形ア，イが，次の①と②の規則にしたがって，大きさを変えながら移動します。



① 正方形アの辺ＰＱはいつもＡＢ上にあり，点ＰはＡを出発して，毎秒0.4cmの速さで点ＱがＢに着くまでＢの方へ動く。また，点Ｒはいつも辺ＡＣ上にある。

② 正方形イの辺ＳＴはいつもＢＣ上にあり，点ＳはＰと同時にＣを出発して，一定の速さで点ＴがＢに着くまでＢの方へ動く。また，ＴはＱと同時にＢに着き，点Ｕはいつも辺ＡＣ上にある。

これについて，次の問いに答えなさい。

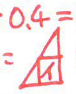
となったとき，

☆：★＝15：10＝3：2 だから

★＝15÷(3+2)×2＝6cm。Ｐは 10−6＝4cm 動いたので，4÷0.4＝10s後。

(1) 点Ｓの速さは，毎秒何cmですか。

正方形イも，10s後に

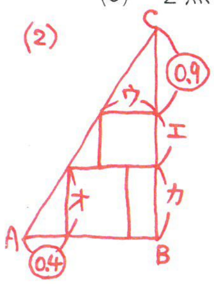


となった。Ｓは10sで，☆＝9cm 動いたから，毎秒 9÷10＝$\boxed{0.9}$ cm。

(2) 正方形アとイが重なり始めるのは，２点Ｐ，Ｑが出発してから何秒後ですか。

(3) ２点Ｐ，Ｑが出発してから８秒後の，正方形アとイが重なった部分の周りの長さを求めなさい。

(2)



3:2を利用して，

ウ＝0.6，エも0.6

オ＝0.6，カも0.6

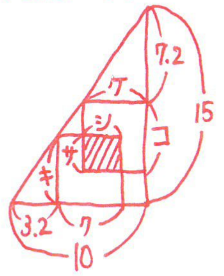
ＢＣ＝0.9＋0.6＋0.6

＝2.1

2.1＝15cmだから，

①＝15÷2.1＝$\boxed{7\frac{1}{7}}$ 秒後

(3) ８秒で，Ｐは 0.4×8＝3.2cm，Ｓは 0.9×8＝7.2cm 動く。



3:2を利用して，

キ＝4.8cm，クも4.8cm，ケ＝4.8cm，コも4.8cm。

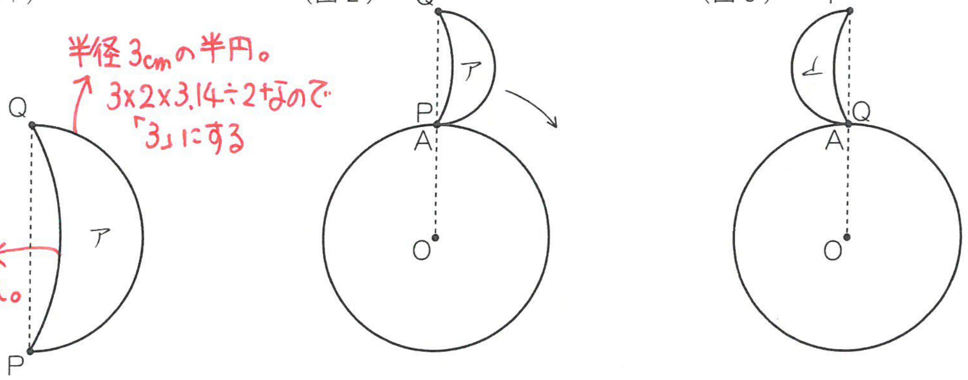
サ＝7.2＋4.8＋4.8－15＝1.8cm，

シ＝3.2＋4.8＋4.8－10＝2.8cm。

重なった部分のまわりの長さは，(1.8＋2.8)×2＝$\boxed{9.2}$ cm。

5 （図１）の図形アは，半径３cmの円の周の一部分と，半径６cmの円の周の一部分で囲まれた図形です。図の点線は，半径３cmの円の直径を表しています。この図形アを，（図２）の位置から，円Ｏのまわりをすべらないように矢印の方向に回転させていきます。

（図１）　（図２）　（図３）



半径3cmの半円。3×2×3.14÷2なので「3」にする

半径6cm，中心角60°の弧。6×2×3.14÷6なので，「2」にする

これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　円Ｏのまわりを１周したら，再び（図２）の状態になりました。このような円Ｏのうち，最も小さいものは半径何cmですか。ただし，半径は６cm未満とします。

アのまわりをなぞって，Aにもどってきた。円Oの半径を□cmとすると，□×2×3.14＝(3＋2)×3.14 だから，□＝$\boxed{2.5}$

(2)　円Ｏの半径が６cmのとき，再び（図２）の状態になるのは，円Ｏのまわりを何周したときですか。

円Oの円周は，6×2×3.14＝12×3.14。アのまわりは(3＋2)×3.14＝5×3.14。12と5の最小公倍数は60だから，60÷12＝$\boxed{5}$周。

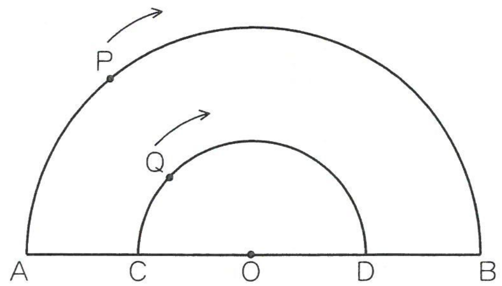
(3)　円Ｏの半径が６cmのとき，はじめて（図３）の状態になるのは，円Ｏのまわりを何周したときですか。

(図3)のようになるのは，アの外側だけをなぞってもどってきた「3×3.14」のときか，外側だけをなぞったあと１まわりした，(3＋5)×3.14＝「8×3.14」のとき，… というように，3.14を省略すれば，はじめが3で，5ずつ増える等差数列になる。→☆

また，円Oの円周は，6×2×3.14＝12×3.14 だから，☆の等差数列の中で，はじめて12の倍数になるものを探せばよい。

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43,「48」だから，48÷12＝$\boxed{4}$周。

6 右の図のように，点Ｏを中心とする半径10cmと20cmの半円があります。点Ｐは点Ａを出発して毎秒１cmの速さで，半円ＡＢ上を点Ｂまで進みます。点Ｑは点Ａを出発して毎秒１cmの速さで，Ａ→Ｃ→半円ＣＤ上→Ｄ→Ｂ→Ｄ→…のように往復します。円周率を3.14として，次の問いに答えなさい。



(1)　点Ｐが出発し，少しおくれて点Ｑが出発したところ，同時に点Ｂに着きました。点Ｑは何秒おくれて出発しましたか。

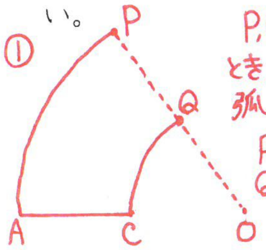
Pは，(20×2×3.14÷2)÷1＝62.8秒かかり，Qは，(10＋10×2×3.14÷2＋10)÷1＝51.4秒かかる。　Qは，62.8−51.4＝$\boxed{11.4}$秒おくれて出発したことになる。

(2)　点Ｐ，Ｑが同時に点Ａを出発してから，

①　点Ｐ，Ｑ，Ｏがはじめて一直線上に並ぶのは何秒後ですか。

②　点Ｐ，Ｑ，Ｏが次に一直線上に並ぶのは，点Ａを出発してから何秒後ですか。分数で答えなさい。

①



P,Q,Oが一直線上に並んだとき，弧CQを△1とすると，弧APは△2になる。

Pの動いた長さは△2，Qの動いた長さは 10＋△1だから，△2＝10＋△1

△1＝10 なので，△2＝20

Pは20cm動いたから，20÷1＝$\boxed{20}$秒後。

②Qが折り返してもどってくるときに，一直線上に並ぶ。

QがA→C→D→B→D と動くのに，

(10＋10×2×3.14÷2＋10＋10)÷1＝61.4秒かかる。

(20×2×3.14÷2)÷1＝62.8秒かかる。

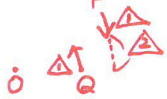
PはAからBまで，(20×2×3.14÷2)÷1＝62.8秒かかる。

よって，QがDに着いたとき，PはBまであと，1×(62.8−61.4)＝1.4cmのこっている。

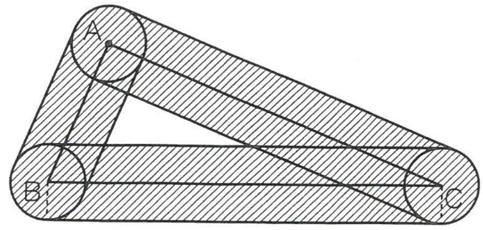
右図のように，△3＝1.4cmなので，

△1＝$\frac{7}{15}$cm。

61.4＋$\frac{7}{15}$÷1＝$\boxed{61\frac{13}{15}}$

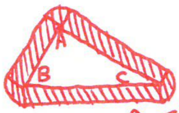


7　右の図のような三角形ＡＢＣと，頂点Ａを中心とする円があります。これについて，次の問いに答えなさい。

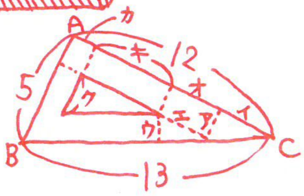


(1)　この円の中心が三角形ＡＢＣの辺上にあるようにして三角形を１周するとき，この円が通過する部分を右の図に斜線で示しなさい。　右図。

(2)　三角形ＡＢＣの辺の長さが，ＡＢ＝５cm，ＢＣ＝13cm，ＣＡ＝12cmで，角Ａが直角，円の半径が１cmであるとします。このとき，(1)で示した斜線部分の面積を求めなさい。ただし，円周率は3.14として計算しなさい。

三角形ABCの外側部分


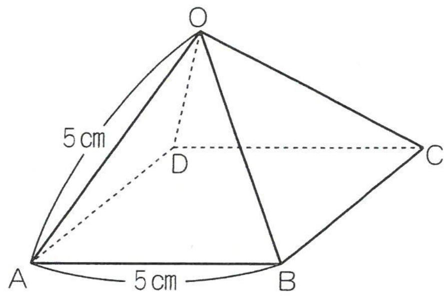
は，$(5+12+13)\times1+1\times1\times3.14=33.14$ cm²

〃　内側部分は，


ア＝1cm，イ＝$1\div5\times12=2.4$cm
ウ＝1cm，エ＝$1\div5\times13=2.6$cm
オ＝2.6cm，カ＝1cm，キ＝$12-(1+2.6+2.4)=6$cm
ク＝$6\div12\times5=2.5$cm
$5\times12\div2-2.5\times6\div2=22.5$ cm²

斜線部分の面積は，$33.14+22.5=\boxed{55.64}$ cm²

8　図のような底面が１辺５cmの正方形で，側面が１辺５cmの正三角形である正四角すいがあります。点Ｐは底面の辺上をＡ→Ｂ→Ｃ→Ｄ→Ａの向きに１分あたり２cmの速さで回り続けています。点Ｑは頂点Ｏから辺ＯＡ，ＯＢ，ＯＣ，ＯＤのいずれかを選んで底面に下り，下りてからはできるだけ短時間にＰと重なる（追いついたり，出会ったりすること）ように，底面の辺上をＰと同じ向きか逆の向きに回り始めます。Ｑは１分あたり３cmの速さで動きます。これについて，次の問いに答えなさい。



(1)　ＰがＡを通過して２分後にＱが辺ＯＡを選んで出発します。ＰとＱが重なるのはＱが出発してから何分何秒後ですか。Qが出発して　$5\div3=\frac{5}{3}$分たったとき，QはAに着く。そのときPは，$2\times(2+\frac{5}{3})=\frac{22}{3}$cm 進んでいるので，$\frac{22}{3}\div(3-2)=\frac{22}{3}$分で追いつくが，$(5\times4-\frac{22}{3})\div(3+2)=\frac{38}{15}$分で出会う方が早い。

$\frac{5}{3}+\frac{38}{15}=4\frac{1}{5}$
だから，$\boxed{4分12秒後}$。

(2)　ＰがＡを通過して４分後にＱが出発します。Ｑが辺ＯＡ，ＯＢ，ＯＣ，ＯＤのどれを選んだとき，最も短い時間でＰとＱが重なりますか。また，それはＱが出発してから何分何秒後ですか。

(3)　Ｑが出発してからＰとＱが重なるまでの時間が最も長くなるのは，Ｑが出発してから何分何秒のときですか。

(4)　Ｑが辺ＯＡ，ＯＢいずれかを選んで出発しても，ＰとＱの重なる時間が同じになるのは，Ｑが出発してから何分何秒のときですか。

(2) QはOから底面まで下りるのに$\frac{5}{3}$分かかるので，Pは　$2\times(4+\frac{5}{3})=\frac{34}{3}$cm進んでいる。
PはCからDに向かって　$\frac{34}{3}-5\times2=\frac{4}{3}$cmのところにいるので，Qは$\boxed{OD}$を選んだら，$(5-\frac{4}{3})\div(3+2)=\frac{11}{15}$分で重なる。　$\frac{5}{3}+\frac{11}{15}=2\frac{2}{5}$ → $\boxed{2分24秒後}$。

(3) 追いかけても，出会っても同じ時間かかるようなところにPがいたら，重なるまでの時間が最も長い。
PがAから進んだきょりを□とすると，□÷(3−2)　と，(5×4−□)÷(3+2)が，同じ時間になる。
□：(20−□)が　1:5　になればよいから，□＝①，20−□＝⑤　となる。⑥＝20　だから，①＝$\frac{10}{3}$　　$\frac{5}{3}+\frac{10}{3}=\boxed{5分0秒}$

(4) PとQがAとBから等しいきょりで重なれば，QがOA，OBいずれかを選んで出発しても，PとQの重なる時間が同じになる。
PとQがAとBのまん中で重なるときは，Qは　$5+5\div2=7.5$cm進んだので，$7.5\div3=2\frac{1}{2}$ → $\boxed{2分30秒}$
PとQがCとD　〃　〃　$5+5+5\div2=12.5$cm　〃　$12.5\div3=4\frac{1}{6}$ → $\boxed{4分10秒}$