第12回　条件を整理する問題

解答は132ページ

1　1辺の長さが1cmの立方体の積み木が27個あります。このすべての面に色をぬりたいのですが，次のような操作をくり返していくことにします。これを1回の[作業]ということにします。

[作業]　まだ色のぬられていない面だけが表面にくるようにして，すべての積み木を使って，1辺の長さが3cmの立方体を作ります。このとき，表面に出ているすべての面を決められた色でぬったのち，もとの27個の状態にもどします。

(1)　第1回目の[作業]を赤い絵の具でぬりました。このとき，赤くぬられた面の数と，まだぬられていない面の数の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

赤… 3×3×6=54　全… 1×1×6×27=162　白… 162−54=108　赤：白=54：108=$\boxed{1:2}$

(2)　さらに，うまく組み合わせることにより，[作業]をあと2回行うことができます。第2回目を青い絵の具で，第3回目を黄色い絵の具でぬりました。このとき，3つの色が2面ずつぬられている積み木と，2つの色のみでぬられている積み木はそれぞれいくつありますか。

(赤，青，黄)が(3,3,0)，(3,0,3)，(0,3,3)がア個ずつ，(1,2,3)，(1,3,2)，(2,1,3)，(2,3,1)，(3,1,2)，(3,2,1)がイ個ずつ，(2,2,2)がウ個あったとする。
赤が3面ぬられているのは8個あるから，ア+ア+イ+イ=8 なので，ア+イ=4。
〃 2面 〃 12個あるから，イ+イ+ウ=12。
〃 1面 〃 6個あるから，イ+イ=6。なので，イ=3。
〃 0面 〃 1個 〃 ア=1。
以上のことから，(2,2,2)は，ウ=12−3×2=$\boxed{6}$個。(3,3,0)(3,0,3)(0,3,3)合わせて，ア×3=$\boxed{3}$個。

2　次のような2種類の操作で，4個の文字の列ＡＢＣＤを並べかえます。

操作ア：ＡＢＣＤ→ＢＡＣＤ(左から1番目のものと2番目のものを入れかえる。)
操作イ：ＡＢＣＤ→ＢＣＤＡ(一番左のものを，一番右に移動する。)

この2種類の操作をいくつか組み合わせて使い，ＡＢＣＤを並べかえます。たとえば，ＡＢＣＤにア，イ，イの順で操作をすると，

$$ＡＢＣＤ\xrightarrow{ア}ＢＡＣＤ\xrightarrow{イ}ＡＣＤＢ\xrightarrow{イ}ＣＤＢＡ$$

(※の続き)　イイイアアイ…変化なし。
イイイアイア…ABCD→BCDA→CDAB→DABC→ADBC→DBCA→BDCA
イイイイアア…変化なし。
以上のことから，考えられるのは，変化なし(ABCD)，BCAD，BADC，DACB，ACDB，DCBA，CABD，CBDA，BDCAの$\boxed{9}$種類。

となります。この操作を，左から順に続けて，[アイイ]と書くことにします。これについて，次の問いに答えなさい。

アイア… ABCD→BACD→ACDB→CADB　イアイ…ABCD→BCDA→CBDA→BDAC
イイア… ABCD→BCDA→CDAB→DCAB　イイイ…ABCD→BCDA→CDAB→DABC

(1)　[アイア]，[イアイ]，[イイア]，[イイイ]の操作で，ＡＢＣＤはそれぞれどのようになりますか。

(2)　[アイアイアイ]の操作で，ＡＢＣＤはどのようになりますか。

$ABCD\xrightarrow{ア}BACD\xrightarrow{イ}ACDB\xrightarrow{ア}CADB\xrightarrow{イ}ADBC\xrightarrow{ア}DABC\xrightarrow{イ}ABCD$

(3)　アを2回，イを4回使った操作(例えば，[イアイアイイ])で，ＡＢＣＤを並べかえると，何種類の結果ができますか。「アア」だと変化なし，「イイイイ」も変化なしであることに注意する。

アアイイイイ…変化なし。　アイアイイイ…ABCD→BACD→ACDB→CADB→ADBC→DBCA→BCAD
アイイアイイ…ABCD→BACD→ACDB→CDBA→DCBA→CBAD→BADC
アイイイアイ…ABCD→BACD→ACDB→CDBA→DBAC→BDAC→DACB
アイイイイア…変化なし。イアアイイイ…変化なし。イアイアイイ…ABCD→BCDA→CBDA→BDAC→DBAC→BACD→ACDB
イアイイアイ…ABCD→BCDA→CBDA→BDAC→DACB→ADCB→DCBA
イアイイイア…ABCD→BCDA→CBDA→BDAC→DACB→ACBD→CABD
イイアアイイ…変化なし。イイアイアイ…ABCD→BCDA→CDAB→DCAB→CABD→ACBD→CBDA
イイアイイア…ABCD→BCDA→CDAB→DCAB→CABD→ABDC→BADC　あとは，※に。

3 数字 1，2 を使って 4 けたの整数 x を作ります。同じようにして 4 けたの整数 y を作り，x と y の各けたごとの数字の積をそのけたの数字にしてできる 4 けたの整数を $x \ast y$ と表すことにします。たとえば，

2222✱2112＝4224
1121✱1121＝1141

となります。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　x は全部で何個できますか。 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = \boxed{16}$ こ

(2)　(ア)　4 けたの整数 $x \ast 1111$ が 3 の倍数になるような x を全部求め，それらを小さい順に書きなさい。 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211

(イ)　4 けたの整数 $1212 \ast y$ が 3 の倍数になるような y を全部求め，それらを小さい順に書きなさい。 yが1111なら，計算結果は1212となってOK。yの千の位を2にすると +1，百の位を2にすると +2，十の位を2にすると+1，一の位を2にすると+2。

(3)　1111，1212，x，y は，これらのどの 2 個についても✱によってできる 4 けたの整数が必ず 3 の倍数になるといいます。x，y の組を全部求めなさい。ただし，x を y 以下の整数として書きなさい。
+0+0+0+0　+0+0+1+2　+0+2+1+0　+1+0+0+2　+1+2+0+0　+1+2+1+2
1111, 1122, 1221, 2112, 2211, 2222。

(3)　(2)の(ア)(イ)の両方に入っているのは，1122, 1221, 2112, 2211。
右の表のようにして，3の倍数なら○，ちがったら×にする。
よって，(x, y)の組は，(1122, 1221)(1122, 2112)(1221, 2211)(2112, 2211)

	1122	1221	2112	2211
1122	1144 ×	1242 ○	2124 ○	2222 ×
1221		1441 ×	2222 ×	2421 ○
2112			4114 ×	4212 ○
2211				4411 ×

4 A，B の 2 人がジャンケンをして，次のようなルールで階段を上がっていく遊びをします。グーで勝てば 3 段，チョキで勝てば 5 段，パーで勝てば 6 段階段を上がります。最初，A，B は同じ段にいます。A は 1 回目グー，2 回目チョキ，3 回目パーの順で出すことにします。ただし，あいこの場合は 2 人とも動かないことにします。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　3 回のジャンケンが終わったときに，A が B より 14 段上にいるのは，B がどんな手を出すときですか。順に書きなさい。 14＝3＋5＋6 しかないから，Aが全部勝ったときなので，Bは(チョキ，パー，グー)。

(2)　3 回のジャンケンが終わったときに，A が B より 3 段上にいるのは，B がどんな手を出すときですか。考えられる場合のすべてを順に書きなさい。

(3)　3 回のジャンケンが終わったときに，A と B が同じ段にいるのは，B がどんな手を出すときですか。考えられる場合のすべてを順に書きなさい。

(2)　3回ともあいこの場合，AがBより3段上にいることはありえない。
2回あいこの場合，あと1回はAがグーで勝てばよいから，Bは(チョキ，チョキ，パー)。
1回あいこの場合，あと2回のうち1回はAがパーで勝ち，もう1回はBがグーで勝てばよいから，Bは(グー，グー，グー)。
あいこがない場合，1回はAがグーで勝って3段ゲットし，あと2回はAとBが勝って同じ段上がればよいから，Bは(チョキ，パー，チョキ)。
整理すると，答えは(チョキ，チョキ，パー)，(グー，グー，グー)，(チョキ，パー，チョキ)になる。

(3)　3回ともあいこの場合，AとBは同じ段にいるから，Bは(グー，チョキ，パー)。
2回あいこの場合，あと1回は勝負がついたので，同じ段にいることはありえない。
1回あいこの場合，あと2回はAとBが勝って同じ段上がればよい。
1回目があいこなら，(グー，パー，チョキ)。2回目があいこなら(パー，チョキ，グー)。3回目があいこなら(チョキ，グー，パー)。
あいこがない場合，一方はグーとグーで勝って，3+3＝6段上がり，他方はパーで勝って6段上がれば，同じ段になる。
(他方はチョキとチョキで負けて)　(一方はグーで負けて)
ところがこの場合，一方は(グー，グー，グー)と出し，他方は(チョキ，チョキ，パー)と出すことになるが，Aは(グー，チョキ，パー)と出したのでありえない。
よって答えは(グー，チョキ，パー)，(グー，パー，チョキ)，(パー，チョキ，グー)，(チョキ，グー，パー)。

5 6チームで野球大会を開きました。A，B，Cの3チームとD，E，Fの3チームの2つのグループに分かれて予選リーグを行い，予選リーグの同じ順位のチーム同士が順位決定戦を行い，1位から6位までの順位を決めます。また，各試合ごとに勝ったチームには勝ち点2を，負けたチームには勝ち点0を，引き分けのときには両チームに勝ち点1を与えることにしたところ，次のような結果になりました。

ア　Bは勝ち点6で優勝しました。→予選で2勝，順位戦で勝ち

イ　Cは「5位・6位決定戦」に勝って，勝ち点が2です。→予選で2敗，順位戦で勝ち

ウ　Eは勝ち点1で6位です。→順位戦ではCと対戦して負けた。よって予選で1敗1分け，順位戦で負け

エ　AとDは順位決定戦で引き分け，勝ち点は同じです。→3・4位決定戦。Aは予選で1勝1敗。勝ち点2点。よってDも予選で勝ち点2点だから

	A	B	C
A		×	○
B	○		○
C	×	×	

	D	E	F
D		○	×
E	×		△
F	○	△	

か

	D	E	F
D		△	△
E	△		×
F	△	○	

このとき，次の□にあてはまる数を求めなさい。

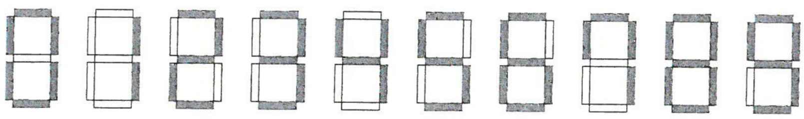
(1)　Aの総合成績は［1］勝［1］敗［1］分けて，勝ち点は［3］です。

(2)　Dの予選での成績は次の2通りが考えられます。

［1］勝［1］敗［0］分け　または，［0］勝［0］敗［2］分け

(3)　Fの総合成績は［1］勝［1］敗［1］分けて，勝ち点は［3］です。
FはBと「1位・2位決定戦」を戦い，負けた。

6 8けたの電卓があります。各位の数字は，図のように，7本の棒のいくつかを点灯することによって表示されます。たとえば，0は6本の棒，1は2本の棒が点灯します。



本数→ 6　2　5　5　4　5　6　4　7　6

これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　2けたの整数を表示したとき，十の位も一の位もそれぞれ6本の棒が点灯しました。このような2けたの整数は何通りありますか。
→0か6か9
2　3
$2\times3=\boxed{6}$通り

(2)　2けたの整数を表示したとき，棒が全部で10本点灯しました。このような2けたの整数は何通りありますか。(十の位，一の位)が(6,4)(5,5)(4,6)の3パターン。
(6,4)のとき→ $2\times2=4$　(5,5)のとき→ $3\times3=9$　(4,6)のとき→ $2\times3=6$　$4+9+6=\boxed{19}$通り。

(3)　ちょうど10本の棒を点灯して表示できる整数は全部で何通りありますか。

1ケタ…NG

2ケタ…(2)で求めた通り，19通り

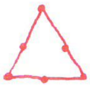
3ケタ…(6,2,2)→ $2\times1\times1=2$　(2,6,2)→ $1\times3\times1=3$　(2,2,6)→ $1\times1\times3=3$　$2+3+3=8$

(4,4,2)→ $2\times2\times1=4$　(4,2,4)も (2,4,4)も4通り。　$4\times3=12$

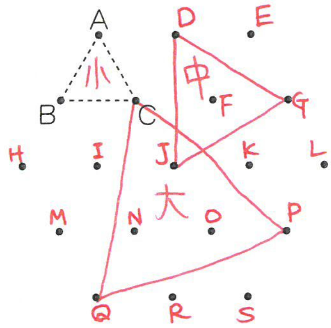
4ケタ…(2,2,2,4)→ $1\times1\times1\times2=2$　(2,2,4,2)も (2,4,2,2)も(4,2,2,2)も2通り。$2\times4=8$

5ケタ…(2,2,2,2,2)→ $1\times1\times1\times1\times1=1$

全部で，$19+8+12+8+1=\boxed{48}$通り

たとえば  はNG

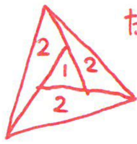
7　右の図のように規則正しく並んだ19個の黒点のうち，3点を結んで三角形を作ります。このとき，三角形の3辺が頂点以外の黒点を通らないようにします。たとえば，A，B，Cの3点を結べば，この条件を満たす正三角形ができます。これについて，次の問いに答えなさい。



1とする

(1)　正三角形は大，中，小の3種類できますが，この大，中，小の正三角形の面積の比を求めなさい。

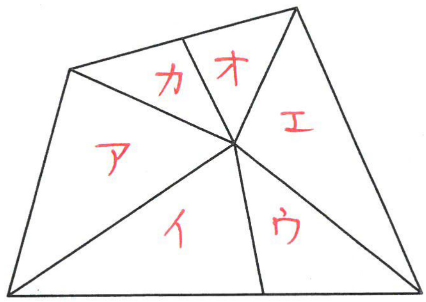
(2)　内部に黒点がちょうど3個入るような三角形は，全部で何個できますか。

(1) 中は， となっているから，小6コの半分なので3。大は，

だから7。よって，$\boxed{7:3:1}$。

(2) 大の正三角形は，内部に黒点が3コ入っているのでOK。
内部の黒点がCIJ, CJF, FJK, INJ, JNO, JOKのものがそれぞれ2コずつある(たとえばCIJの場合，大の正三角形はAMKとDHO)ので，2×6＝12コ。
他に，Aを頂点とする二等辺三角形ARP(内部にC,J,Oがある)，Hを頂点とする二等辺三角形HPG，というように，頂点をA,H,Q,S,L,Eとする二等辺三角形が6コあるので，
12＋6＝$\boxed{18}$コ。

8　右の図のように6つに分けられた部分を，青，赤，黄，白の4色を全部使ってぬり分けます。ただし，となり合う部分は異なる色をぬるものとします。これについて，次の問いに答えなさい。



(1)　青を3か所に用いてぬり分ける方法は全部で何通りありますか。

(2)　青を2か所，赤を2か所に用いてぬり分ける方法は全部で何通りありますか。

(3)　ぬり分ける方法は全部で何通りありますか。

(1) 青をアウオにしたとき，イは3通り，エは2通り，カは1通りなので，3×2×1＝6(通り)。
青をイエカにしたときも6通りなので，6×2＝$\boxed{12}$通り。

(2) 青がアウのとき，赤がイエなら，オは2通り，カは1通りなので，2×1＝2(通り)。
〃　赤がイオなら，エ 〃 カ 〃 〃 〃
同様に考えれば，青がアウのとき，赤はイエ・イオ・イカ・エカ それぞれ2通りずつあるので，2×4＝8通り。
青がアエのとき，赤はイオ・イカ・ウオ・ウカ 〃
青がアオのとき，赤はイエ・イカ・ウカ・エカ 〃
このようにして，青がアウ，アエ，アオ，イエ，イオ，イカ，ウオ，ウカ，エカのときにそれぞれ8通りずつあるので，
8×9＝$\boxed{72}$通り。

(3) 青3か所のときは，(1)により12通り。赤3か所，黄3か所，白3か所も同様なので，12×4＝48通り。
青2赤2のときは，(2)により72通り。青2黄2，青2白2，赤2黄2，赤2白2，黄2白2も同様で，72×6＝432通り。
全部で，48＋432＝$\boxed{480}$通り。