第11回　規則性に関する問題

解答は125ページ

むずむず

[1] 0，1，2，3，5，7，10，11，12，13，15，17，20，……のように，0，1，2，3，5，7 だけでつくられる数を小さい順に並べます。これについて，次の問いに答えなさい。

(1) 2007は何番目の数ですか。

変則6進数　0，1，2，3，5，7
普通6進数　0，1，2，3，4，5

(2) 5の倍数のうち，100番目に小さい数を求めなさい。ただし，0は5の倍数とします。

(3) 3の倍数のうち，100番目に小さい数を求めなさい。ただし，0は3の倍数とします。

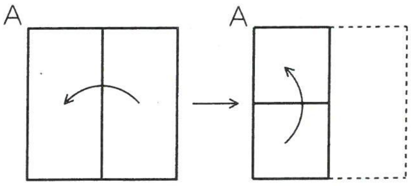
(1) 2007を普通6進数にすると，2005。　216×2＋1×5＝437は，0から始まるので $\boxed{438}$ 番目。
216　36　6　1

(2) 一の位が0から5。1番目は0，2番目は5，3番目は10，…というように，奇数番目は一の位が0，偶数番目は一の位が5。よって100番目は，一の位が5である数の，100÷2＝50（番目）。0から始まるので，50番目の数は49だから，普通6進数にすると121。変則6進数でも121なので，答えは $\boxed{1215}$。

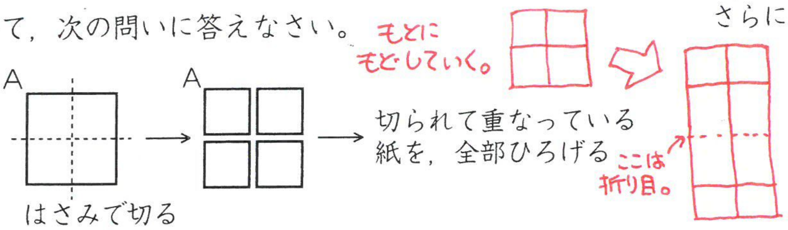
6)49
6)8…1
1…2

(3) 0から数をすべて書いていって，3の倍数に下線を引くと，0，1，2，3，5，7，10，11，12，13，15，17，20，21，22，23，25，27，30，…
というように，6コ中2コが必ず3の倍数になっている。
100÷2＝50セット目。6×50＝300番目は299。
普通6進数で1215なので，変則6進数で1217が，セットの最後の数。戻っていって，$\boxed{1215}$ が3の倍数。

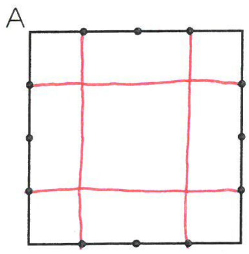
[2] 正方形の紙に右のような操作を行います。この操作を1回とかぞえ，操作を何回か続けて行います。操作を何回か続けて行ってできた正方形を，右の図のようにハサミで4つの同じ大きさの正方形に切り離してから，折られて重なっている紙をひろげます。これについて，次の問いに答えなさい。



頂点Aを動かさないで，半分に折ってから，さらに半分に折り正方形にする。

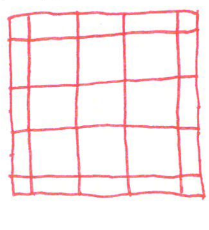


(1) 操作を1回行ってからハサミで切り離し，ひろげると，どのような紙ができますか。右の図の正方形に，切れ目の線をかいて示しなさい。なお，この正方形の辺上の点は，各辺を四等分した点です。



(2) 操作を何回か続けて行ってからハサミで切り離し，ひろげると，面積の異なる紙が何枚かずつできますが，そのうち一番大きい紙が1000枚以上ありました。操作を行った回数として考えられる，最も小さい数を答えなさい。

(3) 操作を何回か続けて行ってからハサミで切り離し，ひろげると，一番大きい紙が10000枚以上ありました。このとき二番目に大きい紙は何枚できていますか。考えられる枚数のうち，最も小さい数を答えなさい。



(2) 操作を1回行なってから切って広げると，(1)の図のように，一番大きい紙は 1×1＝1枚。
〃　2回　〃　右の図のように，〃　3×3＝9枚。
〃　3回　〃　7×7＝49枚。（7という数は，3の2倍プラス1。）
〃　4回　〃　15×15＝225枚。（15　〃　7　〃　）
〃　5回　〃　31×31＝961枚。（31　〃　15　〃　）
〃　$\boxed{6回}$　〃　63×63＝オーバー。（63　〃　31　〃　）

(3) たとえば操作を2回行なったときは，右の図のように一番大きい紙は 3×3＝9枚で，二番目に大きい紙は 3×4＝12枚。
〃　7回　〃　一番大きい紙は 127×127 で10000枚以上。二番目に大きい紙は 127×4＝$\boxed{508}$ 枚。

3 上から順に，１から400までの番号が書かれた400枚のカードを重ねたものがあります。このカードを，次の操作を１回としてくり返し行い，少なくしていきます。

<操作>

１番上のカードを捨て，次のカードは残りのカードの一番下に入れる。

１回目の<操作>で，１の番号のカードを捨て，２の番号のカードは残りのカードの１番下に入れます。

２回目の<操作>で，３の番号のカードを捨て，４の番号のカードは残りのカードの１番下に入れます。このあとも同じようにして，<操作>をくり返します。これについて，次の問いに答えなさい。

(1) 144回目の<操作>で，捨てるカードの番号はいくつですか。

1, 3, 5, …と捨てていくので
144回目は，$1+2\times(144-1)=\boxed{287}$

(2) 128の番号のカードを捨てるのは，何回目の<操作>ですか。

(3) <操作>をくり返して行っていくと，最後に１枚のカードが残りました。このカードの番号はいくつですか。

(2) 400÷2=200回行って，2の倍数カードが残る。次に200÷2=100回行って，4の倍数カードが残る。次の50回で8の倍数，次の25回で16の倍数が残り，次の12回で32, 64, …, 384と400が残り，次に400を捨て32が残り，次に64を捨て96が残り，次に128を捨て160が残るから，$200+100+50+25+12+3=\boxed{390}$回。

(3) まま子立て問題。(1)で144回操作をしたら，400－144=256枚残って，256という数は2の累乗になっている。このとき，次に捨てる数である289の直前の数である$\boxed{288}$が最後に残る。

4 直角三角形を次のような操作で，いくつかの直角三角形に分割していきます。

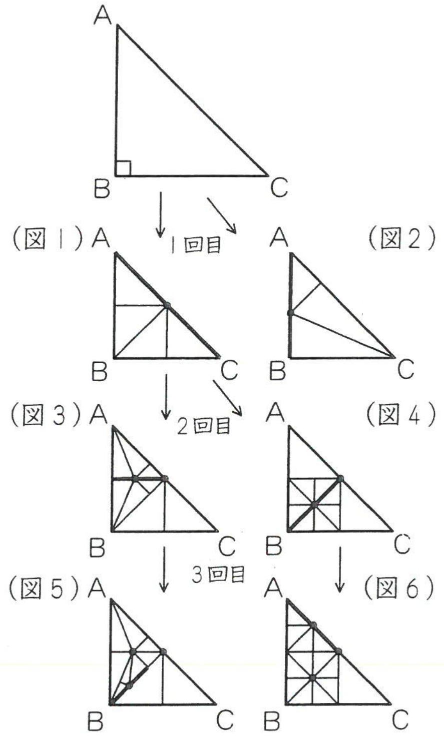
6 次ページへ。つくコマ。

ア　直角三角形の１つの辺を選び，その真ん中に印をつける。

イ　つけた印と直角三角形の頂点を線で結ぶ。

ウ　つけた印から直角三角形の他の辺に垂直な線をひく。ただし，選んだ辺が２つの直角三角形の辺になっているときには，その２つの三角形両方にイ，ウを行います。

上の操作を１回とかぞえ，分割してできた直角三角形に，この操作を何回も繰り返して，右の図の直角三角形ＡＢＣを小さな直角三角形に分割していきます。たとえば，１回目の操作を行うと，図１，図２のように４個，３個の直角三角形に分割されます。また，２回目の操作を行うと，たとえば図３，図４のように８個，10個の直角三角形に分割されます。さらに，３回目の操作を行うと，たとえば図５，図６のように10個，13個の直角三角形に分割されます。これについて，次の問いに答えなさい。

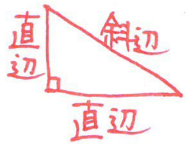


(1) 操作を３回行ったとき，直角三角形ＡＢＣのそれぞれの辺に印が１つずつありました。直角三角形ＡＢＣは何個の直角三角形に分割されますか。考えられる個数をすべて答えなさい。

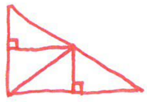
(2) 操作を10回行ったとき，直角三角形ＡＢＣの辺上にある印は１個だけでした。直角三角形ＡＢＣは，最も多くて何個の直角三角形に分割されますか。また，最も少なくて何個の直角三角形に分割されますか。

(3) 操作を50回行ったとき，辺ＡＣ上にある印は10個でした。直角三角形ＡＢＣは，最も多くて何個の直角三角形に分割されますか。また，最も少なくて何個の直角三角形に分割されますか。

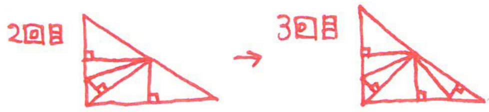
P45 [4] 直角三角形の、ななめの辺を「斜辺」、直角をはさむ辺を「直辺」と名付けることにする。



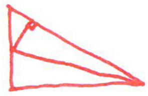
(1) ・1回目に斜辺に印をつけたとき右の図のように4分割される。



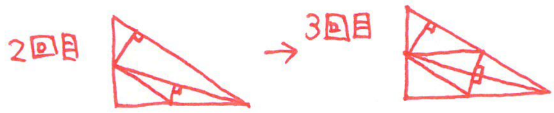
2回目・3回目は右のサンプル図のようになり、8分割になる。



・1回目に直辺に印をつけたとき



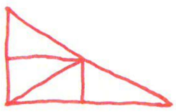
2回目・3回目は右のサンプル図のようになり、7分割になる。

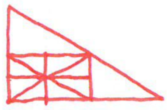


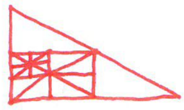
・よって、考えられるのは $\boxed{8}$ 分割と $\boxed{7}$ 分割になる。

(2) ・最も多い場合

1回目に4分割。　2回目は下の図のように、全部で10分割。　3回目も下の図のように、全部で16分割。





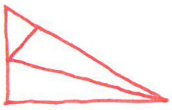


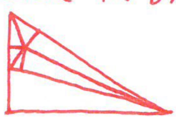
このようにして、4分割、10分割、16分割、…と、分割数は等差数列になっているので、10回目は、

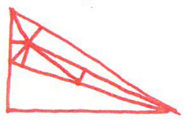
はじめ＋ふえる数×(N−1)＝$4+6\times(10-1)=\boxed{58}$ 分割。

・最も少ない場合

1回目に3分割。 2回目で7分割。 3回目で9分割。このあともプラス2分割になっていくので、





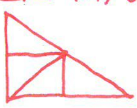


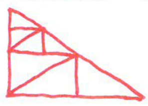
$3+4+2\times(10-2)=\boxed{23}$ 分割。

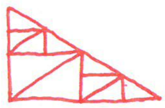
(3) ・最も多い場合

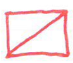
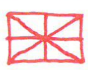
1回目4分割。 2回目に7分割。 3回目に10分割。このように、斜辺に印をつけることを10回行って、

$4+3\times(10-1)=31$ 分割。



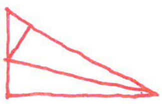


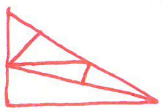


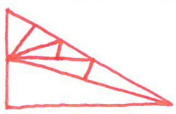
次に、 のようになっているところを  のようにすることによって、2分割だったものが8分割になり、6分割ずつふえる。これを、残り40回ぶん行うから、$31+6\times40=\boxed{271}$ 分割。

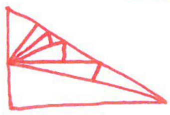
・最も少ない場合

1回目3分割。 2回目5分割。 3回目7分割。 4回目9分割。 このように2分割ずつ増えていくので、50回では、



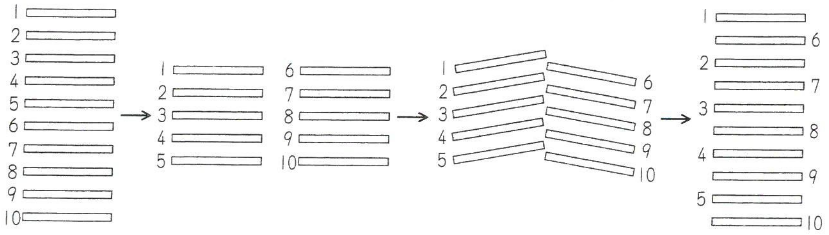






$3+2\times(50-1)=\boxed{101}$ 分割。

5 10枚のカードを，次のように2つに分けてから混ぜ合わせます。



たとえば，上から3枚目のカードは混ぜ合わせると上から5枚目にきます。このように，10枚すべてのカードについて調べると，次のようになります。

混ぜ合わせる前		混ぜ合わせた後	混ぜ合わせる前		混ぜ合わせた後
1枚目	→	1枚目	6枚目	→	2枚目
2枚目	→	3枚目	7枚目	→	4枚目
3枚目	→	5枚目	8枚目	→	6枚目
4枚目	→	7枚目	9枚目	→	8枚目
5枚目	→	9枚目	10枚目	→	10枚目
(※) □	→	□×2−1	□	→	□×2−10

上と同じように混ぜ合わせることを何回もくり返します。これについて，次の問いに答えなさい。

(1) 9枚目のカードは3回混ぜ合わせると何枚目にきますか。

$9 \xrightarrow{①} 8 \xrightarrow{②} 6 \xrightarrow{③} 2$ だから，$\boxed{2}$枚目。

(2) 次のカードは上のように混ぜ合わせていくと何回ではじめて元の位置にもどってきますか。

① 2枚目 ② 7枚目

① $2 \xrightarrow{①} 3 \xrightarrow{②} 5 \xrightarrow{③} 9 \xrightarrow{④} 8 \xrightarrow{⑤} 6 \xrightarrow{⑥} 2$ だから，$\boxed{6}$回。

② $7 \xrightarrow{①} 4 \xrightarrow{②} 7$ だから，$\boxed{2}$回。

カードの枚数を変えて，同じように混ぜ合わせることを何回もくり返します。このとき，次の問いに答えなさい。

10枚のときは上の(※)で示したような規則。16枚のときは，1～8枚目なら □→□×2−1，9～16枚目なら □→□×2−16。よって (□×2−1)×2−16＝□。整理して，□×4−2−16＝□なので，

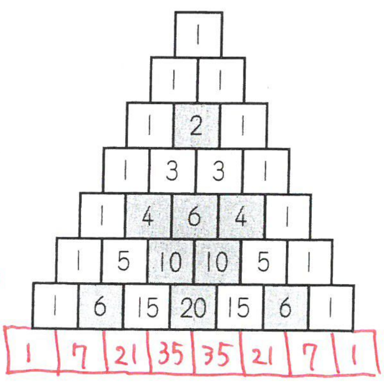
(3) カードが16枚のとき，2回で初めて元の位置にもどるカードは，何枚目と何枚目のカードですか。

$\boxed{□=6}$，$6×2−1=\boxed{11}$。

(4) 18枚目のカードが2回で初めて元の位置にもどるのは，カードの枚数が何枚のときですか。ただし，カードの枚数は偶数とします。

カードの枚数をN枚とすると，(※)と同様に，1～$\frac{N}{2}$枚目なら □→□×2−1，$\frac{N}{2}$+1～N枚目なら □→□×2−N。よって18枚目なら 18→18×2−1＝35，35→35×2−N＝18 になればよいから，N＝$\boxed{52}$。

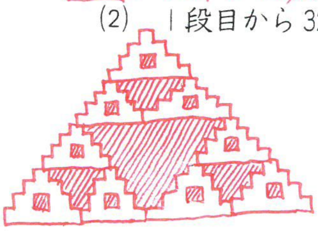
6 右の図のように，白と黒の2種類のカードが並べられています。カードにはあるきまりにしたがって数字が書かれていて，その数字が奇数ならば白，偶数ならば黒のカードになっています。これについて，次の問いに答えなさい。



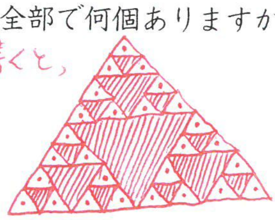
(1) 1段目から16段目までに偶数は全部で何個ありますか。

が9セットで9コ，他に3+2+1＝6コ，7+6+…+1＝28コ。9+6×3+28＝$\boxed{55}$コ。

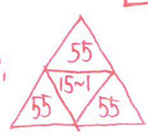
(2) 1段目から32段目までに偶数は全部で何個ありますか。



簡略化して書くと，



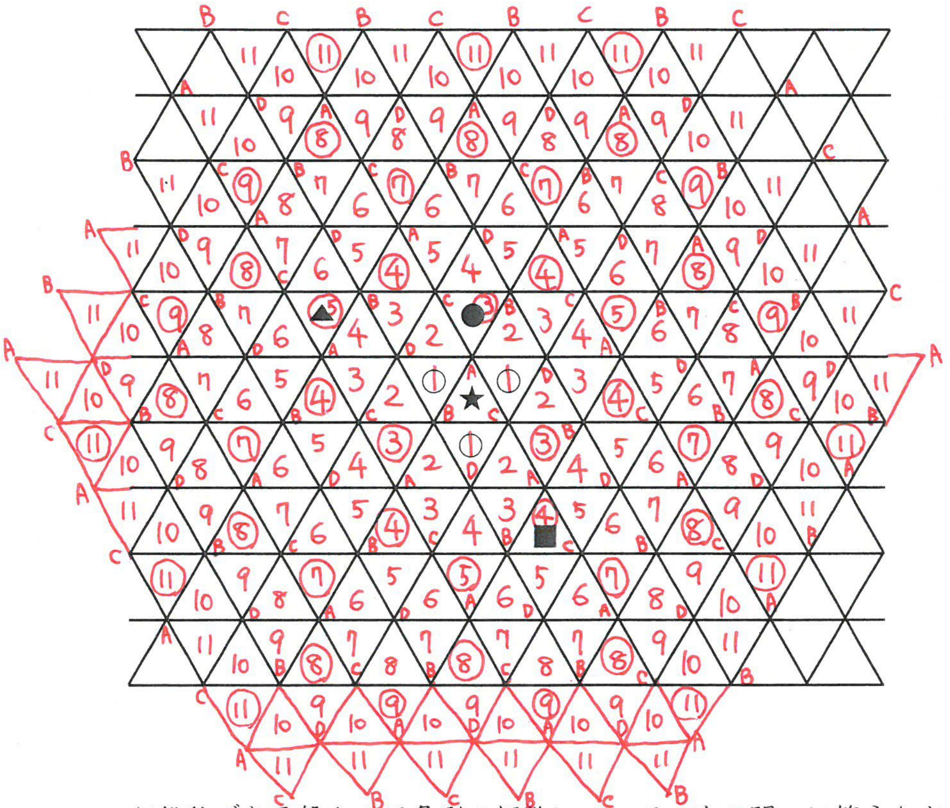
で，

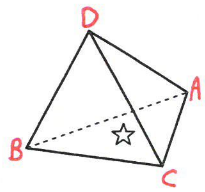


55×3＋(1+2+…+15)
＝165＋120
＝$\boxed{285}$

7 右の図のような，4つの面が同じ大きさの三角形でできたコマと，下のようなコマの面と同じ大きさの正三角形がたくさんかいてある盤があります。コマの１つの面には印☆がついていて，はじめに，この☆の面が下の図の★のついた三角形とぴったり重なるようにおいてあります。

盤についている面の１つの辺を動かさないようにコマを倒し，別の面を下にする操作を何回か行って，コマを動かすことを考えます。例えば，１回目の操作で，コマは図の○をつけた３つの三角形のどれかに移動します。また，例えば，３回目の操作で図の●，４回目の操作で図の■，５回目の操作で図の▲の三角形にたどりついて，このときいずれも☆の面は●，■，▲に重なります。





コマが移動できる盤上の三角形の個数について，次の問いに答えなさい。ただし，はじめにコマをおいた★の三角形は個数に含めません。

(1)　２回目の操作で，はじめてコマがたどりつける三角形は何個ありますか。また，そのうち☆の面が重なるものは何個ありますか。３回目，４回目の操作についても同じものを求めなさい。

2回目…6コ, 0コ　3回目…9コ, 3コ　4回目…12コ, 6コ

(2)　８回以下の操作でコマが移動できる三角形は全部で何個ありますか。また，そのうち☆の面が重なるものは全部で何個ありますか。(1)と同様にして, 5回目…15コ, 3コ　6回目…18コ, 0コ
7回目…21コ, 6コ　8回目…24コ, 12コ　だから, 1回目の3コ, 0コもふくめて, 3+6+9+…+24=$\boxed{108}$コ, 3+6+3+6+12=$\boxed{30}$コ

(3)　100回以下の操作でコマが移動できる三角形のうち，☆のついた面が重なるものは全部で何個ありますか。

2回目からの☆が重なる個数を書いていくと, 0, 3, 6, 3, 0, 6, 12, 6, 0, 9, … となっている。
4回ずつ区切ると,「0, 3, 6, 3」「0, 6, 12, 6」「0, 9, … 」というように.「0, 3の倍数, 6の倍数, 3の倍数」となっている。2回目から100回目までの99回ぶんは, 99÷4=24…3 だから, 24セットと, あと3コ。
1セットの合計は, 0+3+6+3=12, 0+6+12+6=24, … というように, 12の倍数になっているから,
24セット目は, 12×24=288。1セット目から24セット目までの合計は, (12+288)×24÷2=3600。
あと3コは, 25セット目にあたる。0と, 3×25=75と, 6×25=150。
よって, 3600+0+75+150=$\boxed{3825}$。