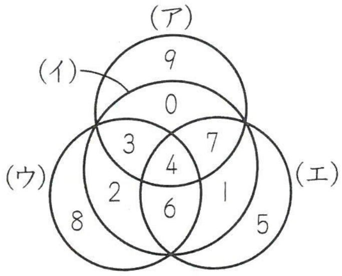
第10回　数に関する問題

解答は118ページ

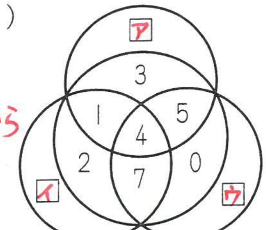
1　4個の円(ア)，(イ)，(ウ)，(エ)が図のように交わり，10個の部分に分かれています。この10個の部分に0，1，2，3，4，5，6，7，8，9の数字を，同じ数が重複しないように，しかも各円内の数字の和が同じ値(Nとする)になるようにわりあてます。例えば，図のようにわりあてると，



円(ア)の和は9＋0＋3＋4＋7＝23
円(イ)の和は0＋3＋4＋7＋2＋6＋1＝23
円(ウ)の和は3＋4＋8＋2＋6＝23
円(エ)の和は4＋7＋6＋1＋5＝23

となり，N＝23です。これについて，次の問いに答えなさい。

(図1)



(1)　(図1)の□の中に数字を当てはめなさい。→

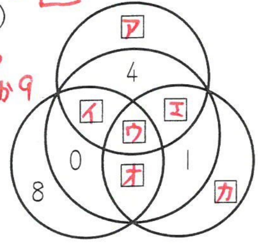
//// と \\\\ は等しいから
ア＝2＋7＋0＝$\boxed{9}$
同様にして，イ＝3＋5＋0＝$\boxed{8}$，ウ＝3＋1＋2＝$\boxed{6}$

(2)　(図2)について，

① Nの値のうち，最も小さい数は何ですか。

→もしアとカが7と9なら，中央の円は 0＋1＋2＋…＋6＝$\boxed{21}$ となり，最小になる。それができることを，以下に説明する。

(図2)



② Nの値が最も小さくなるように□の中に数字を当てはめなさい。

(1)と同様にして，4＋エ＋1＝8 だから エ＝3。4＋イ＋0＝カ で，カは7か9 だから，イは3か5。エが3だったから，イ＝5 で，カ＝9。よって ア＝7。
0＋オ＋1＝ア で ア＝7 だから，オ＝6。中央の円により，ウ＝21－(4＋5＋3＋0＋6＋1)＝2。

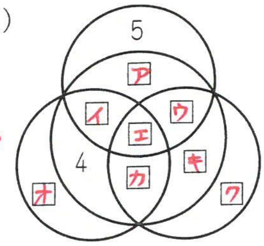
(3)　(図3)の□の中に数字を当てはめなさい。

よって，

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
7	5	2	3	6	9

となる。

(図3)



(1)と同様にして，カ＋キ＋4＝5 だから，
カ，キは0か1。また，ア＋イ＋4＝ク で，ア・イは最低でも2・3だから，ク＝2＋3＋4＝9。
また，ア＋ウ＋キ＝オ で，アは最低で2，ウは最低で6，キは最低で0 だから，
オ＝2＋6＋0＝8 で，ア＝2，ウ＝6，キ＝0。したがって，イ＝3，カ＝1。
エは残った7になるので，

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
2	3	6	7	8	1	0	9

となる。

→踏んだら○，踏まなかったら×，1周目は踏まなくて2周目に踏んだら⊗にする。
1周目の最後に石が何個残るかによって，場合分けをする。
(1)ぴったりで余らないとき。

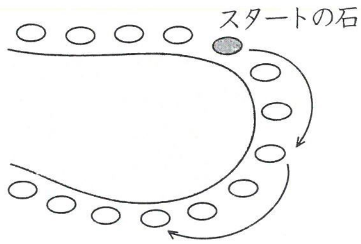
となり，2周目も全く同じ。○が20コなので，20セット。石は全部で，3×20＝$\boxed{60}$コ。

(2)1コ余るとき。1周目は

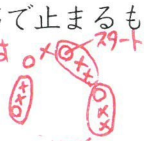
となり，2周目で

となる。余りの1コを取ると，20－1＝19コで，1セットに2コずつあるが，19÷2は割り切れないのでNG。

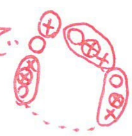
2　池の周りに石が並べられています。その石の上を「2個飛ばし」で池の周りを右回りに歩きます。ある石からスタートして，池をちょうど2周したところで止まると，その間に踏まれた石は，並べられた石のうち20個になります。池の周りに石はいくつ並べられていますか。考えられる個数をすべて答えなさい。ただし，最後の一歩がスタートの石をこえてしまう場合，その一歩は「2個飛ばし」せずにスタートの石で止まるものとします。



(3)2コ余るとき。1周目は



となり，2周目で



となる。余りの2コを取ると，20－2＝18コで，1セットに2コずつあるから，18÷2＝9セット。
3×9＋2＝$\boxed{29}$コ。

3 次のア～エの□にあてはまる整数の組を考えられるだけ答えなさい。ただし，ア～エには同じ数を入れてもよいですが，ア～エを入れかえただけの整数の組は，2度答えてはいけません。答えは，ア＝2，イ＝3，ウ＝7，エ＝42のとき，この順番に，（2，3，7，42）と書きなさい。

$$\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}+\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}+\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}+\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}=1$$

ア≦イ≦ウ≦エ としても，一般性を失わない。アは4以下。
（ア・イ・ウ・エがすべて5以上だと，$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$以下になり不適。）
ア＝4だと，イ・ウ・エのどれか1つでも5になったら和は1にならないので，(4,4,4,4)のみ。
ア＝3だと，イ＝3なら $\frac{1}{ウ}+\frac{1}{エ}=\frac{1}{3}$。ウ＝4のとき エ＝12，ウ＝6のとき エ＝6 だから，(3,3,4,12)，(3,3,6,6)。
イ＝4なら $\frac{1}{ウ}+\frac{1}{エ}=\frac{5}{12}$。ウ＝4のとき エ＝6 だから，(3,4,4,6)。
ア＝2 だと，イ＝3なら $\frac{1}{ウ}+\frac{1}{エ}=\frac{1}{6}$。ウ＝7のとき エ＝42，ウ＝8のとき エ＝24，ウ＝9のとき エ＝18，ウ＝10のとき エ＝15，ウ＝12のとき エ＝12 だから，(2,3,7,42)，(2,3,8,24)，(2,3,9,18)，(2,3,10,15)，(2,3,12,12)。
イ＝4なら同様にして (2,4,5,20)，(2,4,6,12)，(2,4,8,8) イ＝5なら，(2,5,5,10)，イ＝6なら (2,6,6,6)。

4 18枚のカードが積み重ねられていて，上から順に1から18の整数が記入してあります。このカードの束に対して次の2つの操作を組み合わせて何回か行います。

$\boxed{1\,||||}$ を $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\cdots\boxed{18}$ と表します。

操作①　カードの束を2等分して，上下の位置を入れかえる。

【例】

上									下								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
↓																	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	1	2	3	4	5	6	7	8	9

操作②　カードの束を3等分して，上中下の位置を入れかえる。

【例】

上						中						下					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
↓																	
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	1	2	3	4	5	6

例では，上中下を中下上のように入れかえていますが，どのように入れかえてもよいものとします。これについて，次の問いに答えなさい。

(1) 操作①，②を組み合わせて何回か行ったところ，上から順に次のようになりました。空らんになっているカードに整数を記入しなさい。

たとえば，$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$のカードのかたまりが，こわれたりすることはない。なぜなら，操作①では9コずつ，②では6コずつなので，9と6の最大公約数である3コずつのかたまりで移動するから。

7	8	9	16	17	18	1	2	3	10	11	12	13	14	15	4	5	6

(2) 360枚のカードが積み重ねられていて，上から順に1から360の整数が記入してあります。今度は，このカードの束に対して，操作①，操作②および次の操作③を組み合わせて何回か行いました。

操作③　カードの束を5等分して，5つの束の位置を入れかえる。

すると，上から40番目と80番目のカードはともに13の倍数で，40番目のカードの方が80番目のカードより大きい数になりました。このとき，それぞれのカードの数字を求めなさい。

操作①…360÷2＝180ずつ，②…360÷3＝120ずつ，③…360÷5＝72ずつ。180と120と72の最大公約数は12なので，12コずつのかたまりで移動していく。
40番目には，40÷12＝3…4 だから，12でわると4あまる数がある。小さい方から書くと，4，16，28，40，52が13の倍数。その次は，12と13の最小公倍数である156をプラスして，208。（その次は，360をこえるからNG。）
80番目も同様にして，80÷12＝6…8 だから，8，20，32，44，56，68，80，92，104が13の倍数。その次は，156をプラスして，260。（その次は，360をこえるからNG。）
よって，40番目は52か208で，80番目は104か260だが，40番目の方が大きいのだから，40番目は$\boxed{208}$で80番目は$\boxed{104}$。

5 Nを整数とします。1からNまでの整数のうち，3の倍数の個数をA，4の倍数の個数をB，3の倍数でも4の倍数でもない数の個数をCとします。これについて，次の問いに答えなさい。

3と4の最小公倍数である，12までのようすを表にすると，

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	6	6
N	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
C	7	8	8	8	8	9	10	10	10	11	12	12

+6

(1) Nが50のとき，A，B，Cをそれぞれ求めなさい。

24まで 〃

(2) Cが12となるようなNをすべて求めなさい。

(3) Nを1から250までの整数とします。NがCの2倍となるようなNは何個ありますか。

(4) AとBの差が15となるようなNは何個ありますか。また，これらの数のうち，最も小さい数と最も大きい数をそれぞれ求めなさい。

(1) $50 \div 3 = 16 \cdots 2$ だから，Aは $\boxed{16}$。$50 \div 4 = 12 \cdots 2$ だから，Bは $\boxed{12}$。ベン図  の重なりは，$50 \div 12 = 4 \cdots 2$ だから4。

 は，$16+12-4=24$ だから，$C = 50-24 = \boxed{26}$

(2) 右上の表により，$\boxed{23, 24}$。

(3) 右上の表により，12までには

N	4	6	8	10	12
C	2	3	4	5	6

の5コある。$250 \div 12 = 20 \cdots 10$ であまりの10までには

N	4	6	8	10
C	2	3	4	5

の4コあるから，$5 \times 20 + 4 = \boxed{104}$

(4) N=24までのようすは，下の表のようになる。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
A	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8
B	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6
差	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	2	2	2	2

…このままやっていくと，15セット目に15が7回出てきて，その中で最小の数は，$3+12 \times (15-1) = \boxed{171}$。また，16セット目に15が5回出てきて，その中で最大の数は，$12 \times 16 = \boxed{192}$。全部で $7+5 = \boxed{12}$ 回。

6 2つの袋P，Qがあります。Pの中には，30から39までの整数が1つずつ書いてある10枚のカードが入っています。Qの中には，50から59までの整数が1つずつ書いてある10枚のカードが入っています。P，Qから1枚ずつカードを取り出し，その2枚のカードに書いてある整数の最大公約数を得点とするゲームをします。これについて，次の問いに答えなさい。

右下のような表を書く。めんどうなので，最大公約数が1になる場合は，わくの中に書かなかった。

(1) このゲームを1回したときの得点として考えられるものを，高い得点から順に4つ書きなさい。

右下の表から，$\boxed{19, 18, 17, 13}$。

(2) このゲームを1回したときの得点が4点となるのは，どのようなカードを取り出したときですか。考えられる整数の組をすべて答えなさい。たとえば，Pから30，Qから50のカードを取り出したときは，(30，50)と書きなさい。

右下の表から，(32,52)，(36,52)，(36,56)。

(3) A君，B君，C君の3人がこのゲームを2回ずつ，合計6回しました。6回とも取り出したカードは袋に戻しません。初めにA君が続けて2回，次にB君が続けて2回，最後にC君が続けて2回ゲームをしたら，3人の得点は次のようになりました。

A君…得点の合計は31点

B君…2回目の得点は1回目の得点の4倍

C君…得点の合計はB君の得点の合計と等しい

① A君はどのようなカードを取り出しましたか。その整数の組を2組とも書きなさい。

② B君は2回目にどのようなカードを取り出しましたか。その整数の組を書きなさい。

③ C君はどのようなカードを取り出しましたか。その整数の組を2組とも書きなさい。

① 18+13=31のときだから，(36,54)と(39,52)。

② 1回目の4倍が2回目になっているのは，1回目が1で2回目が4か，1回目が2で2回目が8。4や8になるのは，右の表を見て，(32,52)と(32,56)と(36,52)と(36,56)のとき。しかし，Aは36と52をすでに取っているから，考えられるのは(32,56)のみ。

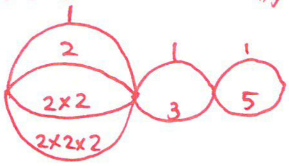
③ B君は，2回目に(32,56)を取ったので，8点になった。よってB君の1回目は2点なので，B君の合計は10点。従って，C君の合計も10点。合計が10点になるためには 1+9，2+8，3+7，4+6，5+5 のいずれかになる必要があるが，1+9は9がないのでNG，2+8は8がすでに使われたのでNG，3+7も，すでにQの56は使われたのでNG，4+6も，すでにPの32とPの36が使われたのでNG。よって，5+5しか残されていないので，(30,55)と(35,50)になる。

P＼Q	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
30	10	3	2		6	5	2	3	2	
31										
32	2		4		2		8		2	
33		3			3	11		3		
34	2	17	2		2		2		2	
35	5					5	7			
36	2	3	4		18		4	3	2	
37										
38	2		2		2		2	19	2	
39		3	13		3			3		

連続した整数の和で表す

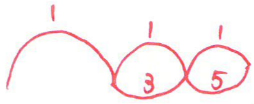
定理　どんな整数も，1以外の奇数の約数の個数ぶんだけ連続した整数の和で表すことができる。

たとえば 120の場合。$120=2\times2\times2\times3\times5$ で，道順の図にすると，



となる。2，2×2，2×2×2 の道を通ると偶数の約数になってしまうから

奇数の約数にするためには



となり，全部で $1\times2\times2=4$コある。

その4個というのは，1，3，5，15。1以外の奇数は 3，5，15 の3コだから，連続した整数の和で表す方法は，3通りあることになる。

3のとき… $120\div3=40$ だから，$120=40+40+40=39+40+41$

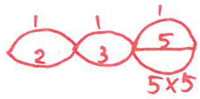
5のとき… $120\div5=24$ だから，$120=24+24+24+24+24$

$=22+23+24+25+26$

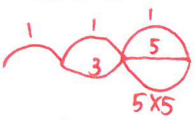
15のとき… $120\div15=8$ だから，$120=\overbrace{8+8+8+8+8+8+8+\underset{\text{まん中}}{8}+8+8+8+8+8+8+8}^{15コ}$

$=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15$

たとえば 150の場合。$150=2\times3\times5\times5$ で，



で，奇数の約数にするためには



だから，1以外の奇数は 3，5，15，25，75 の5コだから，連続した奇数の和で表す方法は，5通りあることになる。

3のとき… $150\div3=50$ だから，$150=50+50+50=49+50+51$

5のとき… $150\div5=30$ だから，$150=30+30+30+30+30=28+29+30+31+32$。

15のとき… $150\div15=10$ だから，$150=10+10+10+10+10+10+10+\overset{\text{まん中}}{10}+10+10+10+10+10+10+10$

$=3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17$

25のとき… $150\div25=6$ だから，$150=6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+\overset{\text{まん中}}{6}+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6$

$=\underbrace{(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6}_{\text{相殺}}+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18$

$=7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18$

75のとき… $150\div75=2$ だから，$150=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{37コ}+\underset{\text{まん中}}{2}+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{37コ}$

$=\underbrace{(-35)+\cdots+(-1)+0+1+2+3+4+\cdots}_{-35から35まで相殺}+39$

$=36+37+38+39$

7　ある整数を，２個以上連続する整数の和で表すことを考えます。たとえば，

ルール
奇数個の和→その数が，その奇数でわり切れること。
偶数個の和→その数を，その偶数でわると，小数部分が.5

$7 = 3 + 4$　　　　　　のように，７は２個の連続する整数の和で，
$15 = 4 + 5 + 6$　　　　のように，15は３個の連続する整数の和で，
$22 = 4 + 5 + 6 + 7$　のように，22は４個の連続する整数の和で，

表すことができます。また，

$15 = 7 + 8$，$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

のように表すこともできますから，15は，２個の連続する整数の和でも３個の連続する整数の和でも５個の連続する整数の和でも表せる数です。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　100以下の数で，２個の連続する整数の和でも３個の連続する整数の和でも５個の連続する整数の和でも表せる数のうち最も大きい数Mは何ですか。→奇数　→3の倍数　→5の倍数

(2)　(1)で求めた数Mは，２個の連続する整数の和，３個の連続する整数の和，５個の連続する整数の和以外に何個かの連続する整数の和で書き表すことができます。どのように書き表せますか。それを考えられるだけ書きなさい。

(1) 奇数で，3の倍数でも5の倍数でもある。＝奇数で15の倍数。＝100以下で最大の数は $\boxed{75}$。

(2) 4コの和→75÷4＝18.75 だからNG。
6コの和→75÷6＝12.5 だからOK。75−(1+2+3+4+5)＝60　60÷6＝10 だから，$\boxed{10+11+12+13+14+15}$。
7コの和→75÷7が，わり切れないからNG。
8コの和→75÷8＝9.375 だからNG。
9コの和→75÷9が，わり切れないからNG。
10コの和→75÷10＝7.5 だからOK。75−(1+2+…+9)＝30　30÷10＝3 だから，$\boxed{3+4+5+6+7+8+9+10+11+12}$
11コの和→75÷11 がわり切れないからNG。
12コの和→最低でも，1+2+…+12＝78 だからNG。

8　整数を２個以上の連続する整数の和で表すことを考えます。たとえば，

ルール
どんな整数も，1以外の奇数の約数の個数ぶんだけ，連続した整数の和で表すことができる。

$9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$

で，９は２個以上の連続する整数の和で表す方法が２通りあります。これについて，次の問いに答えなさい。→9の約数は1,3,9だから，1以外の奇数の約数は3と9の2個なので，2通り。

(1)　2010を２個以上の連続する整数の和で表す方法は全部で何通りありますか。

2010＝2×3×5×67で，2を使用すると偶数になってしまうので使用しない。3×5×67になり，3 5 67 なので 2×2×2＝$\boxed{6}$通り。

(2)　このような表し方が３通りだけある整数のうち，一番小さいものを求めなさい。

1以外の奇数の約数が3コある場合だから，1をふくめると約数が4コ。よって，3 5 となっていればよいから，3×5＝$\boxed{15}$。

(3)　このような表し方が３通りだけある整数のうち，50以下のものをすべて求めなさい。

約数が4コ＝素数の立方数 か，素数×別の素数。
素数の立方数…3×3×3＝27 はOK。5×5×5＝125 以上はNG。
素数×別の素数…3×5＝15，3×7＝21，3×11＝33，3×13＝39，5×7＝35，×2
30，42
小さい数からならべると，15,21,27,30,33,35,39,42。